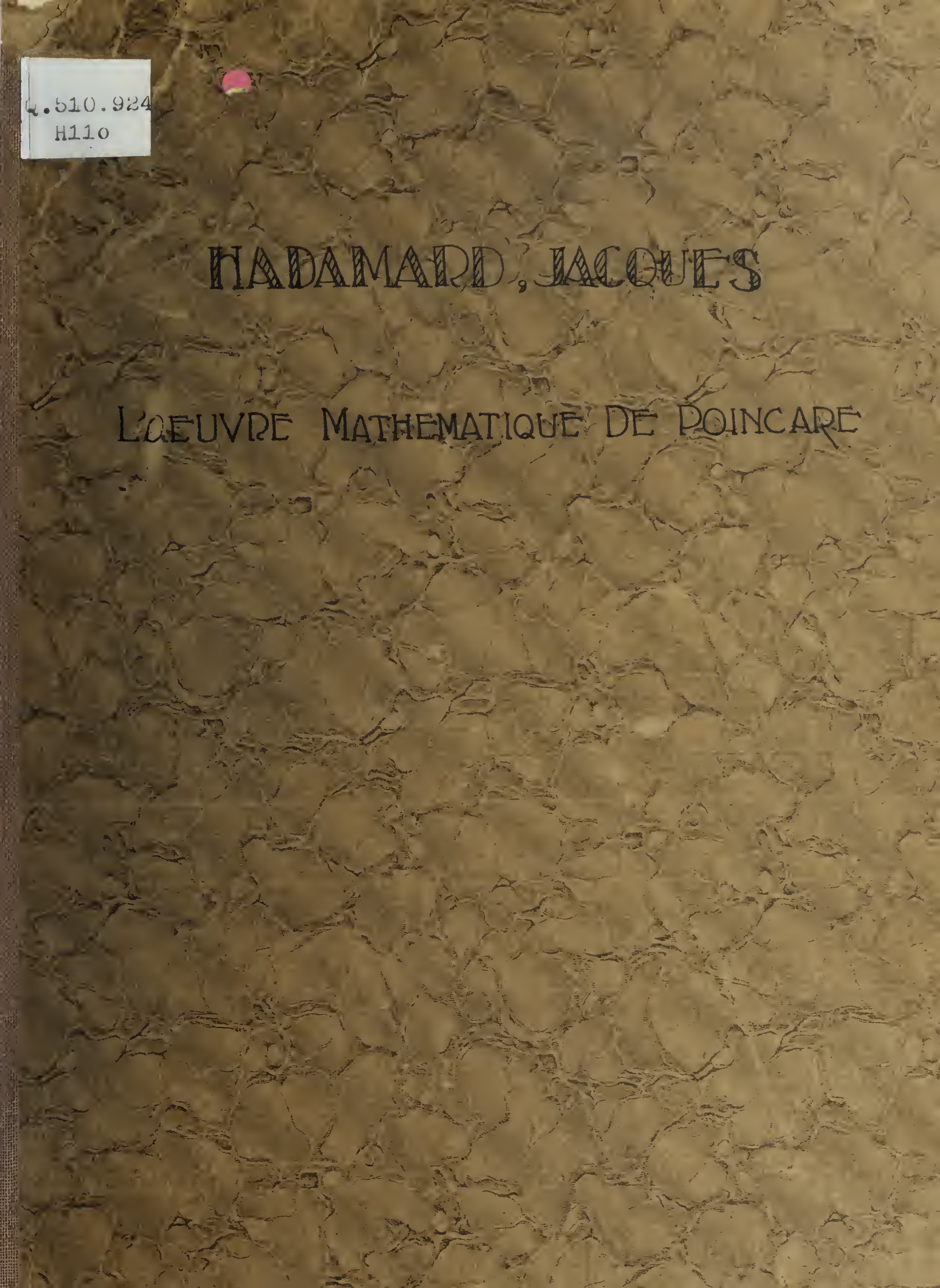


Q.510.924
H11o
HADAMARD, JACQUES
L'ŒUVRE MATHEMATIQUE DE POINCARE



*Offert par l'Auteur*



# L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE POINCARÉ

PAR JACQUES HADAMARD

---

Extrait des *Acta mathematica*, tome 38.

# L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE POINCARÉ.

Par

JACQUES HADAMARD

à Paris.

Poincaré lui-même a fourni aux lecteurs des *Acta* une analyse détaillée de son œuvre.[1]

On comprendra que, sur tous les points qui ont été portés à leur connaissance dans un des styles les plus lumineux, les plus définitifs que la langue scientifique — et la langue française — aient connus, nous nous croyions dispensés d'insister. Il nous arrivera donc très souvent de renvoyer à l'*Analyse* dont il s'agit.

Nous n'essaierons pas, d'autre part, de chercher dans tout l'ensemble de cette œuvre une unité, d'en dégager une personnalité intellectuelle. Cette tentative, qui s'imposerait pour tout autre, serait, à notre sens, chimérique en ce qui concerne Poincaré, et nous croirions diminuer en même temps que dénaturer son œuvre en nous y essayant. Ce serait méconnaître cette pensée «capable de faire tenir en elle toutes les autres pensées, de comprendre jusqu'au fond, et par une sorte de découverte renouvelée, tout ce que la science humaine peut aujourd'hui comprendre».[2]

Assurément, tout penseur tend à marquer de son sceau personnel ce que son cerveau façonne. Mais si cette tendance est une des forces de l'artiste, le savant, lui, bien loin de chercher à l'entretenir, la subirait plutôt. Elle est, chez lui, combattue par une nécessité toute contraire, celle de l'objectivité. »Nous sommes serviteurs plutôt que maîtres en mathématiques», aimait à dire Hermite, et l'adage tout analogue de Bacon est aussi vrai des mathématiques elles mêmes que des sciences expérimentales. Le savant — surtout le mathéma-

[1] Analyse de ses travaux scientifiques. Acta Math. tome 38.
[2] Painlevé, *Temps* du 18 Juillet 1912.

ticien — ne dispose guère, au fond, des moyens d'attaque. Tout au plus suit-il en général son tempérament dans le choix du terrain.

Poincaré ne fit même point ainsi. Il emprunta ses sujets d'étude non aux ressources de son esprit, mais aux besoins de la science. Il a été présent partout où il y avait une lacune grave à combler, un grand obstacle à surmonter. Lorsque nous aurons essayé d'énumérer — même aussi rapidement qu'il nous faudra le faire — les questions auxquelles il s'est attaqué, il nous semblera avoir touché à toutes celles auxquelles peuvent s'intéresser les mathématiciens et qui nécessitent encore leurs efforts. Son œuvre est devenue, dès lors, le patrimoine commun de tous. Si Poincaré a une «manière», si même on peut employer à son égard ce mot qui ressemble à «manie», nous en avons tous hérité, et elle est en chacun de nous.

De ses résultats se dégage souvent une unité; mais celle-ci n'est pas inhérente à l'auteur. Elle est, elle aussi, objective et réside dans les faits eux-mêmes. Nul mieux que Poincaré ne sut, en effet, découvrir, entre les diverses parties de la science, des relations imprévues, parce que personne ne sut mieux dominer cette science de tous les côtés à la fois.

Cette souplesse et cette universalité, cette adaptation rapide et parfaite à tous les problèmes posés par les mathématiques et leurs applications, se sont manifestées de manière d'autant plus éclatante qu'à notre époque, l'une des sciences qui dictent surtout ces problèmes, la Physique, évolue avec une plus déconcertante rapidité. On sait, — et d'autres le diront ici mieux que moi — à quel degré Poincaré, dès qu'il s'est mêlé à cette évolution, a su toujours la suivre et souvent la guider.

L'histoire de l'œuvre de Poincaré ne sera donc, au fond, autre chose que l'histoire même de la science mathématique et des problèmes qu'elle s'est posés à notre époque.

Le plus important d'entre eux est encore aujourd'hui le même qui est apparu à la suite de l'invention du Calcul infinitésimal.

Nous sommes loin d'avoir résolu les difficultés qu'il présente. Mais là même où nous y sommes arrivés, ce n'a été, le plus souvent, qu'en modifiant profondément nos idées sur ce qu'il faut entendre par «solution». Celles que nous avons acquises aujourd'hui se résument toutes dans la forte parole que Poincaré prononçait en 1908[1]:

«Il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a

[1] Conférence prononcée au Congrès international des Mathématiciens, Rome; t. 1, p. 173 des *Actes du Congrès*.

seulement des problèmes *plus ou moins* résolus», — c'est-à-dire qu'il y a des solutions donnant lieu à des calculs plus ou moins simples, nous renseignant plus ou moins directement et aussi plus ou moins complètement sur l'objet de notre étude.

On peut dire, à ce point de vue, qu'une première solution est acquise dans la plupart des cas, — et cette conquête, ébauchée dès Newton, est surtout l'œuvre de Cauchy et de Weierstrass: — des relations entre états *infiniment* voisins, on sait déduire, ce qui est fort différent, la connaissance de tous les états *suffisamment voisins* d'un état donné. Si, par exemple, le phénomène à étudier dépend de la position d'un point dans un plan, on sait l'étudier dans toute une petite région entourant un point quelconque donné.

En un certain sens, il peut être ainsi considéré comme connu, puisque, avec de petites régions de cette espèce accolées les unes aux autres, on peut constituer des régions plus étendues et même aussi étendues qu'on le voudra.

Mais cette connaissance est souvent très insuffisante, beaucoup plus encore que ne le serait, pour un voyage d'un bout à l'autre d'un pays, la possession des feuilles partielles de la carte à quelqu'un qui ne disposerait d'aucune autre donnée géographique. Elle l'est à des degrés divers suivant la nature du problème posé; mais dans la plupart des cas, le résultat est connu, dans chaque domaine partiel, par des opérations d'une convergence médiocre, c'est-à-dire assez mal et assez péniblement; d'autant plus mal et d'autant plus péniblement même que le domaine en question est plus petit.

Quoi qu'il en soit, ces premiers résultats, même si l'on n'est pas réduit à s'en contenter, servent tout au moins d'intermédiaires obligés pour en obtenir de meilleurs, de sorte que, presque partout, la marche de la science mathématique actuelle comporte deux étapes:

La solution locale des problèmes;

Le passage de celle-ci à une solution d'ensemble, si cette sorte de synthèse est possible.

Le premier problème qui avait arrêté le Calcul infinitésimal, celui des quadratures, est, en somme, résolu, au sens précédent, d'une manière assez satisfaisante. Cette solution diffère assurément beaucoup de celle que cherchaient, — sans aucune chance de succès, nous le savons maintenant — les contemporains de Leibnitz. Elle contient cependant l'essentiel de ce qu'on peut savoir dans le cas général et des renseignements beaucoup plus importants dans tous les cas particuliers les plus usuels.

Mais le problème général des équations différentielles est autrement difficile. Les petites régions dont nous parlions ne peuvent même plus être considérées indépendamment les unes des autres. On doit les ranger dans un ordre déter-

miné, et les calculs relatifs à l'une d'elles ne peuvent être commencés sans qu'on ait exécuté jusqu'au bout ceux qui concernent les précédentes. En général, il arrive même qu'on ignore *a priori* jusqu'à l'amplitude des pas successifs que l'on peut ainsi effectuer, c'est-à-dire jusqu'aux dimensions des régions partielles successives: c'est ce que l'on ne connaît qu'au moment même où l'on atteint chacune d'elles.

Les difficultés dont nous venons de parler s'aggravent encore — et même d'autres toutes différentes apparaissent — si, au lieu d'équations différentielles ordinaires, on a à traiter des équations aux dérivées partielles.

L'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles est restée jusqu'ici le problème central de la mathématique moderne. Elle en restera vraisemblablement encore l'un des problèmes capitaux, même si la Physique poursuit vers le discontinu l'évolution qui se dessine à l'heure actuelle.

La théorie des équations différentielles fut aussi la première à attirer l'attention de POINCARÉ. Elle fait l'objet de sa Thèse (1879).

Notons cependant que, sous l'influence du maître qui gouverna la génération précédente, j'ai nommé HERMITE, le débutant ne craignait pas de suivre presque au même moment une voie pour ainsi dire opposée à la première, celle de l'Arithmétique.

La Thèse de POINCARÉ contient déjà sur les équations différentielles un résultat d'une forme remarquable, destiné à être plus tard pour lui un puissant levier dans ses recherches de mécanique céleste. Dès ce premier travail, il était, d'autre part, conduit à perfectionner le principal outil dont se fût servi jusque là, la théorie des équations différentielles, outil qu'il allait utiliser mieux que qui que ce soit, en même temps que, le premier, il allait enseigner à s'en passer: la théorie des fonctions analytiques.

Celle-ci allait, presque immédiatement après, lui devoir une de ses plus belles conquêtes: c'est en 1880 que les *fonctions fuchsiennes* vinrent désigner POINCARÉ à l'attention et à l'admiration de tous les géomètres.

## I. La théorie des fonctions.

### § 1. Les fonctions fuchsiennes.

Auxiliaire puissant pour tout le Calcul infinitésimal, la Théorie des fonctions analytiques a fait ses preuves de façon particulièrement éclatante dans la résolution du problème des quadratures, mais surtout lorsqu'il s'est agi de celles qui

portent sur des fonctions algébriques, c'est-à-dire des intégrales elliptiques et abéliennes.[1]

On sait — et, avant de parler des fonctions fuchsiennes, nous rappellerons — les circonstances grâce auxquelles ce degré de perfection a pu être atteint.

La première d'entre elles n'est autre que la polydromie de l'intégrale cherchée, c'est-à-dire, par un phénomène qui n'est pas isolé en Mathématiques — n'a t-on pas dit de Cauchy que ses deux grandes forces furent ce qui avait été l'effroi de ses prédécesseurs, l'infini et l'imaginaire! — le fait même qui paraissait devoir constituer la principale difficulté de son étude. C'est à cette polydromie que la fonction inverse, obtenue en prenant l'intégrale considérée $u$ comme variable indépendante, doit sa double périodicité.

Cette fonction inverse doit, par contre, être uniforme et, pour qu'il en soit ainsi, on doit choisir de manière convenable l'intégrale elliptique qui sert de point de départ. Ici, ce choix — celui de l'intégrale de première espèce — est aisé à faire.

La double périodicité, à son tour, donne la clef de toutes les autres propriétés. Il y a plus. L'Analyse moderne laisse complètement de côté, au premier abord, le problème d'intégration posé et prend pour premier objet l'étude générale des fonctions doublement périodiques d'une variable. Parmi celles là, on découvre ensuite les solutions du problème en question.

On obtient ainsi tout l'ensemble de résultats qui font de l'intégration des différentielles elliptiques l'un des problèmes les mieux résolus de l'Analyse: celui même que Poincaré, dans la conférence à laquelle nous faisions allusion plus haut, prenait comme exemple typique à cet égard.

Les propriétés des fonctions abéliennes sont assurément moins simples et surtout moins commodes pour le calcul numérique que celles des fonctions elliptiques: elles sont toutes parallèles, néanmoins, et ne contentent pas moins complètement ce sens de la beauté dans lequel Poincaré nous a appris à discerner le véritable mobile du savant.

La notion de périodicité suffit à elle seule pour constituer ces deux théories, modèles d'harmonie et d'élégance.

Mais par cela même, on peut dire qu'elle avait rendu tous les services qu'on en pouvait attendre, et nulle autre notion fonctionnelle analogue ne paraissait offrir la même fécondité.

Les deux exemples qui ont inspiré Poincaré étaient cependant déjà con-

[1] Poincaré a eu ici même à retracer l'histoire de ces théories: voir sa Notice sur Weierstrass, Tome 22 des Acta.

nus: je veux parler de la fonction modulaire et de l'inversion de la série hypergéométrique, objets l'une des admirables travaux d'Hermite, l'autre du Mémoire fondamental que l'on doit à M. Schwarz. Ils n'avaient pas fait apercevoir aux géomètres la généralisation hardie qui devait conduire aux *fonctions fuchsiennes.*

Cette généralisation était si audacieuse que le premier mouvement de Poincaré fut de la regarder comme impossible. Il nous apprend lui-même [1] qu'il s'efforça tout d'abord de montrer l'*inexistence* des fonctions dont il s'agit. C'est par une de ces intuitions d'apparence spontanée dont on verra l'histoire dans *Science et Méthode,* qu'il s'engagea dans la voie opposée.

Poincaré va se placer dans des conditions incomparablement plus générales et plus variées que les fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques; mais la marche suivie sera cependant toute semblable de part et d'autre.

A la place du problème de quadrature, il considère une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques. Ce problème dépasse le premier de toute la distance qui sépare l'intégration des équations différentielles de la simple recherche des primitives; parmi les équations différentielles, toutefois, les équations linéaires se présentaient à lui comme les plus simples de toutes.

La polydromie des fonctions obtenues par quadratures se retrouve chez celles qui sont définies par des équations linéaires; quoique plus complexe que le premier, ce nouveau mode de polydromie était bien connu par les recherches de Fuchs, auquel Poincaré sera ainsi conduit à dédier la nouvelle conception.

On aperçoit dès lors immédiatement ce qui devra correspondre à la notion de périodicité: ce rôle appartient à un certain *groupe* de substitutions linéaires.

Tout ceci apparaissait sur les deux exemples que nous citions tout à l'heure, de la fonction modulaire et de la série hypergéométrique. Dans ces deux cas, c'est bien un groupe de substitutions linéaires qui intervient, et ce groupe satisfait à la condition indispensable — nous renvoyons sur ce point à l'exposé de Poincaré [2] — d'être *discontinu,* c'est-à-dire tel que les transformés d'un même point n'aillent pas en s'accumulant en nombre infini dans le voisinage immédiat de l'un quelconque d'entre eux (sauf dans certaines régions particulières ou, plus exactement, le long de certaines lignes du plan).

---

[1] L'exemple des fonctions fuchsiennes est précisément, on le sait, celui que Poincaré a choisi pour décrire au point de vue psychologique, l'invention mathématique et montrer le rôle essentiel qu'y joue l'inconscient.

Ajoutons que, chez Poincaré, l'idée première d'une recherche est toujours mise en évidence avec une merveilleuse netteté qu'on est loin de trouver toujours au même degré chez les plus grands maîtres. C'est dire que l'accusation d'obscurité lancée parfois contre lui nous paraît, du moins au point de vue du lecteur qui va au fond des choses, exprimer le contraire de la vérité.

[2] Voir son *Analyse*, p. 43

Il possède même la seconde propriété par laquelle, entre les groupes linéaires discontinus, POINCARÉ distingue les groupes fuchsiens, à savoir celle de laisser invariant un certain cercle (dit cercle *fondamental*).

Mais il restait à s'inspirer plus étroitement encore de l'exemple des fonctions elliptiques: je veux dire, conformément à ce qui précède, à partir *a priori* du groupe en question, en laissant de côté d'abord l'équation différentielle.

Il fallait même faire un pas de plus, et cette première transformation de la question, suffisante dans les cas traités antérieurement, ne l'était plus cette fois; c'est sans doute pour cette raison que les découvertes mentionnées plus haut d'HERMITE et de SCHWARZ étaient jusque là restées isolées et n'avaient pas mis sur la voie de l'infinie multiplicité d'autres groupes analogues qui allait s'offrir à POINCARÉ. Dans le problème actuel, on ne remonte pas assez loin en s'adressant à la notion du groupe, trop complexe elle même pour nous servir de fondement premier. Il faut, si nous osons nous exprimer ainsi, placer plus bas encore les fondations et appuyer à son tour la notion du groupe sur un autre substratum.

Ce substratum est essentiellement géométrique: POINCARÉ le trouve dans le *polygone générateur*, c'est-à-dire[1] dans la figure qui est au groupe ce que le parallélogramme des périodes est à la double périodicité.

Cette notion intervenait forcément dans les exemples d'HERMITE et de SCHWARZ. Mais POINCARÉ montre qu'elle caractérise tout groupe discontinu. Pure intuition dans le premier Mémoire sur les groupes fuchsiens, ce fait est établi en toute rigueur dans un des Mémoires suivants[2], et une règle générale est énoncée d'après laquelle, à chaque point, on peut faire correspondre un de ses transformés et un seul (à des cas limites près) de manière que, le premier prenant toutes les positions possibles, le second décrive le polygone générateur demandé.

Mais, nous l'avons dit, loin de chercher systématiquement ce dernier en partant du groupe, POINCARÉ suit bien plutôt la marche inverse et part de la notion du polygone, aussi intuitive pour nous que celle du groupe nous est, au fond, peu familière encore. L'expression de «polygone générateur» exprime d'une manière parfaite comment les choses se passent dans l'Analyse de POINCARÉ: c'est lui qui engendre véritablement le groupe. Non seulement il suffit entièrement à le définir, mais on lit immédiatement et sans la moindre difficulté, sur cette figure, toutes les propriétés essentielles que l'on veut en connaître: substitutions fondamentales, relations entre ces substitutions, etc.

En particulier, il convient de noter, au point de vue des applications des

[1] Voir *Analyse*, p. 44.

[2] Acta, t. IV.

fonctions fuchsiennes, la simplicité avec laquelle s'exprime ainsi la relation entre un groupe et ses sous-groupes: le polygone générateur P′ du sous-groupe est formé par la juxtaposition du polygone générateur P (correspondant au groupe contenant) et de quelques uns des transformés de P.

On voit combien serait chimérique, ici, la distinction, dont on a tant abusé, entre la tendance géométrique et la tendance analytique. Tout n'est que formes et que vue géométrique à la base de cette série de Mémoires auxquels la haute Analyse allait devoir un de ses progrès les plus importants; et toute l'œuvre de Poincaré offre des exemples analogues.

La théorie est ainsi fondée moyenant une hypothèse essentielle, à laquelle doit satisfaire un polygone générateur pour donner naissance à un groupe discontinu: il faut que ce polygone et ses homologues successifs puissent paver, sans chevauchement ni lacune, le plan, ou plutôt une portion déterminée du plan (dans le cas des groupes fuchsiens, l'intérieur de ce cercle fondamental qui est supposé invariant par toutes les substitutions du groupe). Nous ne redirons pas en détail, après Poincaré,[1] comment la condition qu'il indiqua à cet effet, si simple que fût son énoncé géométrique, était d'une démonstration particulièrement difficile, ni comment, pour triompher de cette difficulté, il fut conduit à faire intervenir un auxiliaire inattendu, la géométrie non euclidienne. La forme sous laquelle il l'employa, — voisine, au surplus, de celles de Cayley et de M. Darboux[2] — diffère à peine, au fond, de l'image bien connue par laquelle, plusieurs années plus tard,[3] il mettait en évidence, d'une manière frappante, l'impossibilité de trouver une contradiction dans cette géométrie.

La même méthode est employée pour fonder la théorie des groupes kleinéens (groupes linéaires discontinus autres que les groupes fuchsiens, c'est-à-dire sans cercle fondamental invariant), mais avec un caractère nouveau sur lequel il y a peut être lieu de dire un mot. Poincaré est conduit à une introduction de l'espace à trois dimensions tout analogue à la théorie des imaginaires qui est, géométriquement parlant, la géométrie du plan employée à éclairer celle de la droite. On sait qu'une telle généralisation de la théorie des imaginaires à l'espace n'est pas viable en général. Elle est possible, cependant, quand les raisonnements ne font intervenir que certaines opérations particulières, les transformations *conformes* de l'espace (c'est-à-dire les inversions et leurs combinaisons); et c'est précisément ce qui a lieu pour l'étude des groupes kleinéens.

[1] *Analyse*, p. 45.

[2] Poincaré se rapprocha plus étroitement encore de ces dernières dans les applications qu'il fit des fonctions fuchsiennes et de la géométrie non euclidienne à l'Arithmétique.

[3] Revue générale des Sciences, t. III, 1892, p. 75.

Mais nous n'en avons pas encore fini avec l'aspect géométrique de la question. Non seulement nous venons de voir qu'il fournit à la théorie sa meilleure base, celle qui lui assure la marche la plus claire et la plus intuitive, mais, en lui même, il réservait à Poincaré de surprenantes découvertes.

Le groupe admet en effet toujours des points *singuliers*, en lesquels son caractère discontinu disparaît, c'est-à-dire que, au voisinage de l'un d'entre eux, les homologues du polygone générateur se font de plus en plus petits et de plus en plus serrés, de sorte que les homologues d'un même point quelconque vont en s'y condensant à l'infini: points qui sont forcément singuliers pour la fonction correspondante.

Dans les groupes fuchsiens, ces points sont forcément tous situés sur le cercle fondamental. Ils peuvent constituer par leur ensemble ce cercle tout entier, lequel sera alors, pour la fonction, une *ligne singulière* ou *coupure essentielle*.

La connaissance de ce genre de singularité des fonctions analytiques était alors relativement récente. Toutefois, la fonction modulaire (qui, nous l'avons dit, est une fonction fuchsienne particulière) en avait déjà offert un exemple intéressant. A côté de ce premier exemple, les fonctions fuchsiennes viennent en offrir toute une catégorie d'autres analogues.

Le cas opposé, où les points singuliers, tout en étant encore en nombre infini sur la circonférence du cercle fondamental, ne l'occupent pas tout entière, de sorte que la fonction fuchsienne considérée est prolongeable au delà de ce cercle, semblait au premier abord plus simple et plus conforme à la norme ordinaire que celui où ce cercle est une coupure. Il est, en réalité, beaucoup plus remarquable encore. La figure formée par ces points singuliers n'est autre, en effet, que l'ensemble *parfait non continu*, l'une des conquêtes les plus importantes de la théorie des ensembles.

Or, à cette époque, celle ci n'était pas encore constituée.

C'est seulement après l'apparition de la théorie des groupes fuchsiens que M. Bendixson et Cantor lui même retrouvèrent ces ensembles si paradoxaux. C'est avec elle, par conséquent, qu'ils firent leur première apparition dans la Science.

Ce n'est pas tout. Les groupes kleinéens peuvent, eux aussi, admettre des lignes singulières. Mais celles ci ne sont plus des cercles. Elles ne cessent d'affecter cette forme simple que pour prendre une de celles que l'ancienne Mathématique ignorait, que, sans le secours de l'Analyse, notre esprit est impuissant à concevoir, et auxquelles est attaché le nom de M. Jordan.

C'est une courbe jordanienne qui, comme le montre Poincaré, tient la place du cercle lorsqu'on passe de l'étude des groupes fuchsiens à celle des groupes kleinéens, et une courbe jordanienne dépourvue soit de tangente, soit de courbure en tous ses points.

Certes, les exemples de courbes sans tangentes sont classiques depuis Riemann et Weierstrass; mais tout le monde comprendra la différence profonde qui existe entre un fait obtenu dans des circonstances rassemblées à plaisir, sans autre but et sans autre intérêt que d'en montrer la possibilité, sorte de pièce de musée tératologique, et le même fait rencontré au cours d'une théorie qui a toutes ses racines dans les problèmes les plus usuels et les plus essentiels de l'Analyse générale.

La théorie des groupes kleinéens offre le premier exemple de cette espèce, — le seul même que l'on connaisse, si nous ne nous trompons — en ce qui concerne la notion de courbe jordanienne. Le fait qu'on conduise ainsi nécessairement à cette notion nous fait sentir, dès cet exemple, combien les résultats de Poincaré pénètrent profondément dans la nature intime des choses.

* * *

La notion des groupes fuchsiens et kleinéens étant ainsi fondée, une *fonction fuchsienne* (ou kleinéenne) est celle qui reste invariante par toutes les substitutions d'un de ces groupes. Pour trouver un tel invariant, Poincaré forme d'abord un *invariant relatif*, c'est-à-dire une fonction qui, au lieu de rester inaltérée par une quelconque des substitutions en question, est multipliée par un facteur de forme connue et simple. C'est un intermédiaire classique dans beaucoup de recherches de cette nature non seulement dans la théorie des fonctions elliptiques (lesquelles se présentent comme quotients de fonctions thêta) mais dans celle des invariants de l'algèbre, ou même de certains invariants différentiels.[1] Pour les fonctions thêta fuchsiennes, comme pour les invariants algébriques, le facteur dont il s'agit est une puissance du déterminant de la substitution. Par là, et par leur mode même de formation, les fonctions thêta fuchsiennes diffèrent des fonctions thêta ordinaires et tendent bien plutôt à se rapprocher de la fonction elliptique $\wp u$ elle même, telle que la forme Weierstrass. Mais celle ci possède la propriété d'invariance absolue et évite, par conséquent, le détour employé dans la théorie actuelle, détour dont la nécessité, comme un peu de réflexion suffit à le faire apercevoir, est indissolublement liée à la présence des points singuliers du groupe.

---

[1] Voir, par exemple, plusieurs travaux de M. Tresse.

Par contre, Poincaré a montré que la méthode ainsi modifiée s'applique à un groupe discontinu quelconque.

Une fois obtenues les fonctions thêta fuchsiennes, le quotient de deux d'entre elles, c'est-à-dire de deux invariants relatifs, donne, comme dans la théorie classique des formes algébriques, une des fonctions invariantes cherchées. Les *fonctions fuchsiennes* sont formées.

La nouvelle notion ainsi créée, si supérieure en généralité, en extension, à celles sur le modèle desquelles elle avait été édifiée, ne leurs cède en rien sous le rapport de la compréhension. Si l'on ne dispose pas, cette fois, de séries rapidement convergentes à la façon des séries $\Theta$, on peut dire que toutes les autres propriétés dont l'imposant ensemble forme la théorie des fonctions elliptiques trouvent encore leurs analogues. Une seule, le théorème d'addition, n'a été étendue par Poincaré qu'à certaines catégories de fonctions fuchsiennes, en relation, comme nous le dirons plus loin, avec les applications arithmétiques.

Mais l'une d'elles domine toutes les autres: les fonctions fuchsiennes présentent, comme les fonctions elliptiques, ce caractère que deux quelconques d'entre elles appartenant au même groupe, sont liées par une relation algébrique.

Dans le cas des fonctions elliptiques, cette relation est forcément très particulière: elle est de genre zéro ou un. Au contraire, ce qui fait l'importance des fonctions fuchsiennes, c'est que toute équation algébrique à deux variables donnée peut être obtenue par leur moyen.

Dans la démonstration de cette proposition résidait une autre, la plus profonde peut-être des grandes difficultés du problème.

L'opération qu'il s'agit d'effectuer est déjà de celles auxquelles s'appliquent les réflexions émises par Poincaré dans son Analyse,[1] c'est-à-dire qu'elle correspond, dans la nouvelle théorie, à ce qu'est le choix de l'intégrale de première espèce dans celle des fonctions elliptiques.[2] Mais autant sont simples les règles qui président à ce dernier choix, autant celui de la variable à l'aide de laquelle les coordonnées d'une courbe algébrique s'expriment par des fonctions fuchsiennes est un résultat caché.

Poincaré y parvint par une audacieuse méthode de continuité. M. Klein, qui avait été immédiatement frappé par la puissance de la nouvelle conception

---

[1] Page 48.

[2] C'est ainsi que la représentation d'une cubique par les fonctions elliptiques repose sur l'introduction de l'intégrale *de première espèce* attachée à cette courbe.

et avait attiré sur elle l'attention générale, obtenait à peu près en même temps, par une voie analogue, le même résultat, à une objection près que Poincaré fut seul à apercevoir et dont la réfutation n'est pas une des parties les moins délicates de cette délicate méthode.[1]

Celle ci repose, en effet, sur la comparaison de deux multiplieités, l'une dont un point quelconque correspond à un groupe fuchsien et a pour coordonnées certains paramètres dont dépend ce groupe, l'autre dont chaque point correspond de même à une équation linéaire du second ordre satisfaisant à certaines conditions données. Or ces multiplicités, entre lesquelles il s'agit d'établir une correspondance univoque, sont limitées, et la démonstration n'est complète que moyennant une étude approfondie de leurs frontières.

Ainsi fut établie cette grandiose proposition qui, suivant l'expression de M. Humbert, apportait «les clefs du monde algébrique» en versant sur les propriétés les plus cachées des courbes algébriques quelconques la même lumière dont les fonctions elliptiques avaient éclairé celles des courbes du troisième degré.

D'autre part, la méthode employée exprimait déjà, par les fonctions fuchsiennes, les intégrales de certaines équations différentielles linéaires du second ordre ayant pour coefficients des fonctions algébriques attachées à la courbe considérée.

Ces équations étaient particulières, et devaient forcément l'être pour les raisons mêmes dont nous avons parlé tout à l'heure.

Mais une fois trouvées ces équations linéaires particulières qui s'intègrent par des fonctions fuchsiennes et dont la recherche est l'objet de la méthode de continuité, celles ci à leur tour, moyennant une nouvelle extension de la méthode, conduisent à l'intégration de toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Il suffit, pour cela, d'introduire un nouvel algorithme, généralisation du premier: les fonctions *zéta fuchsiennes.*

Ainsi, ce que les fonctions elliptiques et abéliennes avaient donné pour le problème des quadratures, la théorie nouvelle le fournit pour le problème, beaucoup plus général et beaucoup plus difficile, de l'intégration des équations différentielles linéaires.

Ce grand résultat aurait, à lui seul, attiré sur cette théorie et sur son auteur l'attention universelle des géomètres, si l'ampleur des généralisations, la hardiesse des méthodes, l'importance des obstacles surmontés n'y avaient pas suffi.

[1] Plus tard, une remarque de M. Schwarz devait fournir à Poincaré l'occasion de revenir après M. Picard sur cette question et de donner du même théorème une seconde démonstration se rattachant à ses recherches de Physique Mathématique.

Comme dans toute la suite de ses travaux, POINCARÉ n'avait pas seulement enrichi la science de faits, mais de toute une catégorie nouvelle de méthodes. Combien celles ci étaient fécondes en progrès ultérieurs, c'est ce que montrait, immédiatement après, la belle théorie des groupes hyperfuchsiens due à M. PICARD et que, d'ailleurs, POINCARÉ lui même devait, à son tour, perfectionner,[1] en même temps qu'il allait définir une autre catégorie de transcendantes remarquables, celles qui admettent un théorème de multiplication.[2]

Mais surtout les fonctions fuchsiennes donnent un nouvel instrument, le plus puissant que l'on possède, pour l'étude des fonctions algébriques et de leurs intégrales: instrument qui a fait ses preuves entre les mains de plusieurs auteurs — citons, entre autres, les résultats obtenus par M. HUMBERT relativement aux sommes qui font l'objet du théorème d'Abel. C'est, d'autre part, grâce à lui, nous allons le voir, que POINCARÉ a réalisé une partie des progrès qu'il a fait faire à cette étude.

* * *

La théorie des fonctions elliptiques est aujourd'hui, sinon achevée — mot qui n'est guère de mise à propos de science — du moins suffisamment éclaircie, et POINCARÉ n'a pas eu à s'y attaquer directement, bien que, à l'occasion de ses recherches arithmétiques, dont nous parlerons plus loin, il ait formé plusieurs développements nouveaux de ces fonctions.

Mais les fonctions abéliennes posent encore, et ont posé à POINCARÉ, toute une série de problèmes.

Pour une partie, ces recherches se rattachent étroitement à celles qui précèdent, en vertu des relations qui existent entre les fonctions fuchsiennes et la théorie des fonctions algébriques, avec laquelle celle des fonctions abéliennes ne fait qu'un.

C'est ainsi que POINCARÉ put découvrir les relations particulières très cachées qui prennent naissance entre les périodes des intégrales abéliennes lorsque la courbe algébrique dont elles dérivent vérifie une équation différentielle linéaire, grâce à l'isomorphisme qui a lieu entre le groupe de cette équation linéaire et celui que la théorie des fonctions fuchsiennes conduit à introduire pour représenter la courbe. Par l'intermédiaire des belles recherches de M. M. FROBENIUS et CARTAN, cette analyse, dont il faudrait aussi dire les relations avec l'Algèbre proprement dite et la théorie de Galois, se rattache à une autre découverte de POINCARÉ, la liaison entre les quantités complexes les plus générales et la théorie des groupes.

---

[1] Voir *Analyse* p. 86.

[2] On sait les résultats essentiels que M. PICARD a également obtenus dans cette dernière voie en formant les fonctions qui subissent des transformations birationnelles lorsqu'on augmente la variable de certaines périodes.

Ce sont également, pour une grande partie, les fonctions fuchsiennes qui lui permirent de traiter les cas singuliers des fonctions abéliennes: il s'agit des cas de *réduction*, dans lesquels, parmi les intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique, en figurent une ou plusieurs susceptibles de dériver d'une courbe plus simple, c'est-à-dire de genre inférieur.

On verra par son *Analyse*[1] comment, conduit une première fois à cette question par la précédente, il y fut un ramené peu plus tard par deux théorèmes de WEIERSTRASS. Lorsqu'il eut fourni et généralisé la démonstration de ces théorèmes (que WEIERSTRASS n'avait pas publiée), d'autres conséquences lui apparurent.

Ici encore, ce fut la théorie des fonctions fuchsiennes qui lui fit apercevoir quelques unes des plus lointaines, et cela non seulement parce qu'elle domine la question au point de vue analytique, mais aussi parce qu'elle apporta l'aide efficace de sa figuration géométrique, si lumineuse, nous l'avons dit, en ce qui regarde les relations d'un groupe fuchsien avec ses sous-groupes.

POINCARÉ considère en particulier les cas où la réduction entraine, entre deux courbes algébriques, une correspondance simplement rationnelle. De cette propriété ressortent, lorsqu'on lui applique les principes de la théorie des fonctions fuchsiennes, une série de conséquences aussi simples et aussi élégantes qu'elles sont cachées au premier abord.

Les cas de dégénérescence dont nous venons de parler ne furent pas simplement pour POINCARÉ des difficultés à résoudre. Ce furent, au contraire, les propriétés de ces fonctions dégénérées qui l'aidérent par la suite à pénétrer celles des autres fonctions abéliennes.

Mais cette deuxième catégorie de recherches découle d'une tout autre source, et, avant de les aborder, il nous faut avoir laissé de côté les transcendantes particulières pour nous occuper de la théorie générale des fonctions analytiques.

## § 2. Relations avec l'Arithmétique. Ensembles. Groupes continus.

Toutefois, avant d'abandonner les groupes et les fonctions fuchsiennes, nous parlerons de travaux qui, dans l'œuvre de POINCARÉ, s'y rattachent plus ou moins étroitement.

Tel est d'abord le cas pour la partie de cette œuvre qui touche à l'Arithmétique.

A côté des perspectives largement ouvertes de l'Analyse pure et de ses applications géométriques et physiques, la théorie des nombres, isolée, au moins en apparence, du reste de la Science, n'a pas cessé cependant d'être cultivée par

[1] Deuxième Partie, X.

les mathématiciens de race. Avec MM. JORDAN et PICARD, c'est surtout POINCARÉ qui contribua à perpétuer à cet égard, dans notre pays, la tradition d'HERMITE. Nous avons dit que de cette tradition procèdent des notes presque contemporaines de la Thèse dont nous avons parlé en commençant. POINCARÉ transporte dès cette époque les méthodes d'HERMITE au cas le plus général des formes de degré quelconque à un nombre quelconque de variables.

Nul domaine où ces généralisations soient plus cachées que celui de l'Arithmétique qui nous occupe en ce moment. La discontinuité qui en fait le caractère essentiel s'y révèle en quelque sorte, au point de vue logique, par celle qui sépare souvent les notions destinées à se montrer analogues entre elles, en ne les laissant se rattacher les unes aux autres que par un fil ténu. En lisant les Notes dans lesquelles POINCARÉ traite ainsi les notions de *genre* et d'*ordre* d'une forme, on se convaincra à quel point de telles analogies sont difficiles à saisir. POINCARÉ sut les rendre claires et évidentes et par conséquent, là comme ailleurs, introduire la simplicité et la cohésion là où semblait devoir régner l'artifice. C'est ce qui apparaît encore à un haut degré dans ses recherches sur la réduction des formes.

M. JORDAN venait de montrer que la méthode même d'HERMITE permet d'établir pour les formes quelconques, le théorème d'après lequel le nombre des classes algébriquement équivalentes est fini. POINCARÉ, poursuivant la même voie, put ainsi généraliser la notion de réduction, généralisation que (comme la précédente, d'ailleurs) HERMITE n'avait donnée, du moins pour des variables en nombre supérieur à 2, que relativement aux formes décomposables en facteurs linéaires.

Avec POINCARÉ, on peut dire que toute question disparait, en ce sens qu'une idée d'une rare simplicité fournit d'un seul coup la règle applicable à tous les problèmes de cette catégorie. La réduction demandée est décomposée en deux opérations dont l'une ne dépend que de l'Algèbre: c'est la réduction de la forme donnée, au sens purement algébrique du mot. L'autre opération est entièrement indépendante de la forme considérée et ne dépend que des propriétés du groupe arithmétique: c'est une sorte de réduction par rapport à ce groupe, des substitutions du groupe linéaire de l'Algèbre, réduction que l'on sait effectuer par cela même que l'on sait réduire les formes quadratiques définies.

La solution de cette seconde partie du problème élimine, en somme, toutes les difficultés de nature arithmétique.

La réduction des formes cubiques ternaires se présente comme application immédiate de ce principe.

Ces recherches, ainsi que celles que POINCARÉ consacra à l'étude des points

de coordonnées rationnelles sur une courbe du troisième degré, sont fondamentales dans la théorie, si peu explorée encore, des formes de degré supérieur.

La théorie des formes quadratiques dut, elle aussi, à POINCARÉ des progrès essentiels; et ceci nous ramène aux fonctions fuchsiennes.

C'est, on le sait, un titre de gloire de quelques uns des plus grands mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle — de DIRICHLET, de RIEMANN, d'HERMITE entre autres — que d'avoir su éclairer l'Arithmétique à l'aide de l'analyse du continu qui semblait, au premier abord, ne devoir jamais y pénétrer.

Ce résultat remarquable a même été obtenu de deux manières entièrement différentes. Le point de départ de RIEMANN est le même que celui de DIRICHLET (et aussi, au fond, que celui qui a servi à JACOBI dans les *Fundamenta*). Mais celui d'HERMITE est sans rapport avec le premier.

Grâce aux fonctions fuchsiennes, POINCARÉ réussit à son tour à établir une alliance analogue, et cela sous deux formes, elles mêmes profondément distinctes, respectivement en relation avec les deux grands principes qui viennent d'être mentionnés. Aux idées d'HERMITE se rattachent les recherches que POINCARÉ entreprend sur les formes quadratiques, dans le cas qui appelle le plus de recherches, celui des formes indéfinies. La particularité qui fait la difficulté et l'intérêt de cette catégorie de formes est, on le sait, que chacune d'elles se reproduit sans altération par une infinité de substitutions linéaires formant un groupe discontinu. Or on est ainsi ramené aux groupes fuchsiens.

Non seulement ceux ci se trouvent ainsi — et cela, comme le montre POINCARÉ[1], par l'intermédiaire de la Géométrie non euclidienne — éclairer la théorie des nombres, mais il est remarquable qu'en l'espèce l'inverse a également lieu: c'est par cette voie qu'on étend à certaines fonctions fuchsiennes la seule propriété remarquable des fonctions elliptiques dont l'extension, dans ce domaine, ne paraît pas pouvoir se faire d'une manière entièrement générale, le théorème d'addition. POINCARÉ montre, en invoquant une fois de plus les propriétés géométriques des polygones générateurs, que cette extension depend d'une sorte de commensurabilité entre le groupe de la fonction fuchsienne et une substitution déterminée, non comprise dans ce groupe; et cette commensurabilité, qui n'existe pas dans le cas général, se présente au contraire lorsque le groupe fuchsien considéré a une origine arithmétique.

Mais ce rapprochement n'est pas, nous l'avons dit, le seul que POINCARÉ ait établi entre les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique. Dès le début de ses recherches, en effet, il a donné du problème de l'équivalence une solution géné-

[1] *Analyse*, page 97.

rale toute nouvelle, fondée sur l'extension au domaine arithmétique de la notion d'invariants. Grâce à la discontinuité des groupes auxquels conduit la théorie des nombres, les invariants arithmétiques existent là même où il n'y a point d'invariants algébriques et, indépendamment d'expressions par intégrales définies, ils en possèdent d'autres sous forme de séries sur lesquelles leur propriété d'invariance est mise immédiatement en évidence. Les séries auxquelles on aboutit ainsi sont très voisines des séries connues de Dirichlet, mais leur formation, qui par conséquent se rattache aux recherches de ce géomètre, s'inspire cependant, comme on le voit, d'un principe d'une bien plus grande généralité et dont la relation avec les méthodes suivies en Algèbre apparaît immédiatement.

Elles sont, d'autre part, étroitement liées aux séries thêta d'une part, aux fonctions fuchsiennes de l'autre et montrent la relation qui existe entre ces deux sortes de fonctions par l'intermédiaire de la fonction modulaire. C'est ce point de vue qui a donné à Poincaré de nouveaux développements des fonctions elliptiques.

L'étude de la catégorie de fonctions fuchsiennes à laquelle appartient ainsi la fonction modulaire devait attirer à nouveau son attention; elle fait l'objet du dernier travail qu'il nous ait laissé.[1]

Outre la théorie des formes, les deux principaux chapitres de l'Arithmétique moderne sont la théorie des nombres premiers et celle des idéaux. Poincaré les a abordés tous deux ensemble dans le Mémoire intitulé *Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de* M. Tchebicheff. La méthode du géomètre russe, conservée dans son principe général, a dû subir d'importantes modifications pour s'adapter à ces nouvelles circonstances. Il est remarquable que le résultat obtenu soit indépendant de deux éléments qui s'introduisent d'une manière nécessaire dans les calculs, le nombre des unités indépendantes du corps considéré et celui des classes d'idéaux qu'il renferme, et que d'autre part, ce résultat relatif aux nombre imaginaires puisse servir à étudier la distribution des nombres premiers réels entre les formes $4n+1$, $4n+3$.

Enfin, rappelons qu'une des premières publications de Poincaré avait enrichi, en même temps que rassemblé dans une synthèse particulièrement lumineuse, les propriétés des corps quadratiques et des idéaux correspondants, en les rattachant à une nouvelle théorie géométrique des réseaux (au sens de Bravais). On sait avec quel succès une synthèse analogue fut reprise plus tard par M. Klein.

* * *

[1] Ce Mémoire (Ann. fac. sciences Toulouse, 1913) n'a paru qu'après la mort de Poincaré et ne figure pas dans la liste qui précède son *Analyse*.

D'autre part, vers le même temps où Poincaré se révélait, deux théories générales nouvelles sont venues modifier la marche de la science: la théorie des *groupes continus* de S. Lie et celle des *ensembles* de Cantor.

L'une et l'autre ne pouvaient manquer de recevoir de Poincaré d'importantes contributions.

La première lui doit une étude nouvelle de ses notions générales, qu'il éclaire[1] grâce à un remarquable emploi de l'intégrale de Cauchy, en montrant, en particulier, que les problèmes que Lie avait réussi à ramener à des équations différentielles peuvent se résoudre par quadratures, sinon par des opérations entièrement algébriques.

Mais la théorie des groupes continus vaut surtout par ses applications. On doit à Poincaré l'une des plus remarquables et des plus inattendues, celle qui est relative aux *quantités complexes* en général, c'est-à-dire aux diverses généralisations que, après Hamilton, Grassmann et d'autres, on peut essayer de donner à la théorie des imaginaires. Poincaré montre que ce problème se ramène entièrement à l'étude et à la discussion de certains groupes continus linéaires.

La théorie de Lie intervient d'ailleurs dans plusieurs autres travaux de Poincaré. Elle joue par exemple, un rôle essentiel dans les recherches dont nous parlerons plus loin sur la représentation conforme et les fonctions de deux variables et c'est par elle, ne l'oublions pas, qu'il guida la théorie naissante de la relativité.

Ailleurs, il montre que son emploi s'impose dans un sujet qui semblait épuisé, la mise en équations des problèmes de Mécanique rationnelle. Dans la méthode classique suivie à cet égard, les déplacements virtuels sur lesquels on opère sont obtenus en faisant varier isolément chaque paramètre; si au contraire, comme Poincaré est obligé de le faire en vue de certaines applications à la Mécanique céleste, ces déplacements virtuels sont choisis d'une manière quelconque, il montre qu'on doit les traiter comme des transformations infinitésimales et introduire la structure du groupe ainsi défini.

L'histoire des relations de Poincaré avec la théorie des ensembles est plus curieuse. Nous avons dit, en effet, qu'il la devança (Voir plus haut, page 211) en l'appliquant avant même qu'elle fût née, et cela dans un de ses résultats les plus saillants et les plus justement célèbres.

[1] Voir p. 93 de son *Analyse*.

Cette théorie s'est depuis constamment remontrée vers la plume. Qu'il s'agisse de théorie des fonctions, d'équations différentielles, on la verra toujours se présenter à lui, comme elle s'imposera désormais à tout géomètre qui, dans un domaine quelconque, tentera d'aller véritablement au fond des choses.

Les hauts problèmes qu'elle soulève en elle même ne pouvaient, eux non plus, laisser Poincaré indifférent. Il les a traités ici même [1] et repris souvent dans ses livres. Le terme de «définition non prédicative» qu'il a introduit, suffit à réfuter plusieurs des sophismes dont les notions fondamentales relatives aux ensembles étaient l'objet. [2]

## § 3. La théorie générale.

Avec Gauss, Cauchy, Riemann, Weierstrass, la notion précise de ce qu'on doit entendre par *fonction analytique* était acquise. La théorie en était faite, au fond, sur le modèle qu'offrait naturellement l'Algèbre. Toute fonction analytique peut être représentée, dans tout domaine suffisamment restreint, sauf au voisinage de certains points particuliers, par un développement en série entière.

Certaines d'entre elles peuvent être ainsi représentées, par un développement unique, pour toutes les valeurs de la ou les variables: ce sont les *fonctions entières*. Dans le cas d'une seule variable indépendante, Weierstrass avait réussi à étendre à ces fonctions le théorème de la décomposition en facteurs, sous une forme identique à celle des polynômes, à ceci près qu'aux facteurs binômes classiques de l'Algèbre venaient s'adjoindre, et cela à deux titres différents, des facteurs exponentiels.

Après ces fonctions entières viennent les fonctions *méromorphes*, analogues aux fonctions rationnelles et qui se comportent comme elles au voisinage d'un point quelconque (à distance finie). Grâce au théorème qui lui a donné la décomposition en facteurs, Weierstrass montre qu'une fonction méromorphe d'une seule variable est le quotient de deux fonctions entières, pendant que le théorème de M. Mittag-Leffler étend à ce domaine la décomposition en éléments simples.

Ces deux cas sont les plus élémentaires. D'autres beaucoup plus compliqués peuvent se présenter, même si l'on se borne aux fonctions uniformes. Mais celles-ci sont loin d'être la règle. La grande difficulté de la théorie est précisément l'existence des fonctions non uniformes, qui, en un certain sens, mettent en défaut la définition même de la notion de fonction.

---

[1] *Acta*, t. 32, 1909.

[2] Le seul raisonnement que nous défendrions contre les critiques de Poincaré à ce point de vue est celui de M. Zermelo sur la possibilité d'ordonner un ensemble quelconque.

De ces fonctions non uniformes, on n'avait qu'une notion purement négative, du moins dans le cas général. Quelques catégories particulières avaient seules été étudiées. A la plus classique d'entre elles, celle des fonctions algébriques, Poincaré avait, dès la Thèse dont nous avons parlé plus haut, adjoint sa généralisation la plus naturelle et la plus importante, celle des fonctions *algébroïdes,* que ses recherches de Mécanique analytique devaient ramener souvent sous sa plume.

Dès que le nombre des variables devenait supérieur à 1, il ne restait de tout cela que le point de départ: le développement en série entière, applicable à une fonction analytique quelconque dans le voisinage d'un point non singulier, et à une fonction entière dans tout l'espace. En particulier, la décomposition en facteurs de ces fonctions entières n'ayant plus lieu, la démonstration donnée par Weierstrass de l'expression d'une fonction méromorphe par le quotient de deux fonctions entières disparaissait du même coup.

De l'outil qui permet de manier si sûrement les fonctions d'une variable, la théorie des fonctions de deux variables ne possédait que le manche.

Tel était l'état de cette branche de la science à la venue de Poincaré. Voyons comment, grâce à lui, l'évolution ultérieure fut possible.

Tout paraissait dit, en un sens, en ce qui regarde les *fonctions entières d'une variable.* Cependant, Laguerre avait montré, à l'aide de la formule de décomposition en facteurs, que, comme les polynômes, les fonctions entières ne devaient pas être placées toutes sur le même plan et présentaient des degrés de complication inégaux tout au moins sous ce point de vue. Avec une pénétration qui a été justement admirée, il avait appris à mesurer cette complication par un nombre, *le genre,* qui fait intervenir à la fois les deux espèces de facteurs exponentiels mentionnées plus haut.

Le problème se posa alors, pour Poincaré, de savoir si cette complication plus ou moins grande de la décomposition en facteurs de Weierstrass avait ou non son retentissement sur les autres propriétés de la fonction. Il put montrer qu'en effet toute limitation supposée connue pour le genre en entraînait une correspondante pour l'ordre de grandeur du module de la fonction elle-même et aussi pour celui des coefficients de son développement, c'est-à-dire pour ses propriétés les plus simples et, en général, les plus aisément constatables.

Ainsi fut fondée la nouvelle théorie des fonctions entières. C'est, en effet, de ce résultat et aussi, ajoutons-le, d'un célèbre théorème dû à M. Picard, qu'est

sortie toute cette théorie, telle qu'elle s'est développée dans le cours de ces dernières années.

C'est d'ailleurs de la même source que découlent encore les progrès apportés, principalement par MM. Borel et Boutroux, à l'étude des fonctions méromorphes: car la méthode employée en cette circonstance dérive manifestement de celle qui est appliquée aux fonctions entières.

On peut même en dire autant pour le point essentiel: c'est en effet dans le même ordre d'idées que les fonctions présentant cette singularité, et elle seule, autrement dit les fonctions *quasi entières*, ont été traitées par M. Maillet.

Les *singularités non isolées* des fonctions uniformes sont un des sujets qui ont le plus particulièrement préoccupé Weierstrass et les géomètres qui, avec lui, ont exploré la théorie des fonctions, et la réalisation des diverses possibilités qui peuvent se présenter à cet égard a été l'un des buts principaux de leurs efforts. Or, parmi les dispositions les plus étranges qui peuvent se rencontrer, il n'en est pas une dont Poincaré n'ait formé, comme eux, des exemples, mais avec une signification nouvelle.

L'existence de coupures essentielles pour les fonctions dont il s'agit était connue depuis Weierstrass. Mais ce sont les fonctions fuchsiennes, — après la fonction modulaire, il est vrai — qui sont venues nous montrer combien il s'en fallait qu'on dût voir là un simple objet de curiosité.

En même temps, nous avons vu ces mêmes fonctions fuchsiennes imposer à Poincaré une nouvelle catégorie de singularités que l'imagination de ses prédécesseurs n'avait pu concevoir: les points singuliers formant un ensemble parfait non continu.

Reste enfin, à côté de la notion de ligne singulière, la notion toute voisine *d'espace lacunaire*. C'est à Poincaré que l'on doit, à cet égard, l'exemple peut être le plus général et en tout cas, le plus fécond, car la méthode qui y conduit, fondée sur l'introduction d'une série de fractions rationnelles, est celle qui, ultérieurement, a permis à M. Borel d'étendre nos connaissances sur ce sujet.

Mais ici encore, ce n'est pas uniquement pour elle même et pour mettre en évidence ses singularités que Poincaré forme la série dont il s'agit. Il y est amené nécessairement par les recherches sur les équations différentielles qui font l'objet de sa thèse. Les intégrales qu'il forme n'existent, comme nous le rappellerons plus loin, que moyennant des conditions d'inégalité convenables entre certains coefficients qui figurent dans l'équation et, dès lors, considérées comme fonctions d'un de ces coefficients, elles présentent précisément la singularité qui nous occupe.

Le rôle de Poincaré, à propos des fonctions à espaces lacunaires, a donc été le même que nous lui avions vu jouer vis-à-vis des lignes singulières, des ensembles parfaits discontinus, des courbes sans courbure.

Certes, même si l'une ou l'autre de ces circonstances avait été destinée à ne jamais se rencontrer dans les applications, leur découverte n'en aurait pas moins été importante pour nous. Poincaré nous a montré, dans un de ses discours,[1] combien il faut rendre grâces à l'Astronomie d'avoir élargi notre esprit par la seule notion de ses distances énormes et d'avoir permis ainsi que «notre imagination, comme l'oeil de l'aigle que le Soleil n'éblouit pas, puisse regarder la vérité face à face». Les singularités dont nous venons de parler tiennent une place analogue, à ceci près qu'elles ont soumis notre imagination à des épreuves autrement rudes encore, et jeté un désarroi passager, non seulement dans les habitudes que nous tenons de nos sens, mais dans celles que nous pouvions croire issues de notre logique elle même.

Poincaré n'a pas laissé à l'avenir le soin d'utiliser la leçon qui s'en dégageait. Au lieu de signaler de loin d'étranges régions que la science pouvait être exposée à rencontrer sur sa route, il les a traversées pour trouver, au delà, le but qu'elle avait à poursuivre. Ses découvertes semblent ainsi aller d'un coup aux limites, non seulement de ce que l'humanité d'aujourd'hui peut découvrir, mais de ce qu'elle peut comprendre.

C'est ce que la théorie des fonctions vient à nouveau de nous montrer. La même impression s'imposera à nous, et plus fortement même, lorsqu'il s'agira des équations différentielles. Plus complexe encore qu'en Théorie des fonctions, la vérité que nous verrons alors se dégager des travaux de Poincaré dépasse probablement la capacité actuelle de nos cerveaux.

La théorie des *fonctions non uniformes* fut tirée du néant grâce à un théorème d'une démonstration des plus délicates.

Une fonction analytique quelconque (par conséquent, non uniforme en général):

$$z = f(x)$$

étant donnée, on peut exprimer $x$ en fonction *uniforme* d'une variable auxiliaire $t$, de manière que $z$ soit aussi une fonction *uniforme* de $t$. La conclusion s'étend même à un nombre quelconque de fonctions d'une même variable.

La théorie des fonctions non uniformes est ainsi ramenée à celle des fonctions uniformes.

[1] Voir *La valeur de la science*, Chap. VI.

Un tel fait ne pouvait manquer de s'imposer à un POINCARÉ après la découverte des fonctions fuchsiennes. Celles-ci, nous l'avons vu, le mettaient en évidence, et fournissaient la variable auxiliaire cherchée, en ce qui regarde les fonctions algébriques. Il y a plus, elles permettent de le démontrer, sinon dans le cas général, du moins dans un cas très étendu, à savoir, toutes les fois que les points singuliers sont en nombre fini et tous réels.

Mais si l'on veut ne faire aucune restriction relativement aux points singuliers, d'autres moyens d'action sont nécessaires.

Ici (comme déjà d'ailleurs pour les fonctions fuchsiennes) ce sont les principes mêmes sur lesquels RIEMANN avait fondé la théorie des fonctions abéliennes qui s'élargissent entre les mains de POINCARÉ, et acquièrent l'ampleur nouvelle que la question comporte. D'une part, tout le calcul va reposer sur la formation d'un domaine géométrique, la surface de RIEMANN, par lequel on peut se représenter la variation simultanée de $z$ et de $x$. En second lieu, un élément physico-mathématique, la théorie du potentiel, joue dans ce calcul le rôle principal. Mais son maniement exige une puissance d'analyse nouvelle, en raison de la complication de la surface de RIEMANN qui est ici à une infinité de feuillets. La notion d'une telle surface de RIEMANN, et surtout des fonctions harmoniques correspondantes est très délicate et ne peut être atteinte que par des passages à la limite appropriés.

On aboutit ainsi à la formation d'une certaine fonction analytique $t$. La propriété essentielle de cette quantité consiste en ce qu'elle ne prend jamais deux fois la même valeur sur la surface. C'est ce que l'on établit aisément à l'aide de l'intégrale classique de CAUCHY, étant donné que $t$ est la limite de fonctions $t_n$ qui possèdent la propriété en question.

Cette grandiose découverte de *l'uniformisation des fonctions analytiques* ne pouvait manquer de provoquer les recherches des géomètres, du moins de ceux qui, capables de ressentir son importance, avaient aussi les forces nécessaires pour aborder ce sujet.[1] A la suite de ces travaux, POINCARÉ revint lui-même sur sa découverte pour la compléter.

Dans l'intervalle, il avait donné, pour la résolution des problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel, une méthode nouvelle, celle du *balayage*. Créée, semble-t-il, en dehors de la préoccupation du problème qui nous occupe, cette méthode se trouvait cependant s'y adapter d'une manière remarquablement parfaite. L'une des difficultés de la question est, nous l'avons dit, la présence d'une infinité de feuillets de la surface de RIEMANN, dont, par suite de cette

[1] Outre les auteurs dont nous parlerons dans un instant, nous nous contenterons de citer ici M. KOEBE.

circonstance, la forme *totale* et en particulier la frontière ne peuvent, au moins au premier abord, être définies sans de sérieuses difficultés. Or il se trouve que celles-ci ne gênent en aucune façon l'application de la méthode du balayage, pour laquelle il suffit de suivre la marche même, classique depuis Weierstrass, de la définition d'une fonction analytique par une suite indéfinie d«'éléments».

Poincaré avait, d'autre part, à l'occasion de son enseignement à la faculté des sciences de Paris, perfectionné toute la technique de la théorie des fonctions harmoniques: il avait, par exemple, reconnu tout le parti qu'elle peut tirer d'un remarquable théorème de Harnack.

Fort de ces nouveaux moyens d'action, il put, répondant à un desideratum de M. Hilbert, écarter en toute certitude pour les fonctions cherchées, les trois points singuliers dont le raisonnement primitif n'excluait pas la possibilité.

D'autre part, les fonctions obtenues ont, en général, un domaine d'existence limité par une ligne sigulière essentielle (un théorème de M. Picard est venu montrer que la solution n'est pas possible sans l'introduction de fonctions présentant ce caractère). MM. Osgood et Brodén s'étaient préoccupés de déterminer la forme exacte du domaine qui, dans le plan de la variable $t$, correspond ainsi à la surface de Riemann donnée. La nouvelle méthode de démonstration permet de préciser davantage les résultats de ces deux auteurs.

Enfin, chose plus précieuse encore, elle fournit la solution la plus simple, — et non plus une solution quelconque —, du problème posé. Dès lors, cette solution est parfaitement déterminée, du moins à une substitution linéaire près. De là ressort encore, comme conséquence, une propriété fonctionnelle qui place les fonctions obtenues à côté des fonctions fuchsiennes.

Ce n'est pas la seule contribution que Poincaré ait apportée à la théorie des fonctions non uniformes. Tout d'abord, c'est à lui qu'on doit la limitation, — au sens de la théorie des ensembles — de la multiplicité des valeurs que peut prendre une telle fonction pour une valeur unique de la variable et aussi des «éléments» (au sens de Weierstrass) qui suffisent à la représenter: limitation essentielle d'ailleurs au second raisonnement par lequel il a établi le théorème d'uniformisation.

De plus, il a indiqué une méthode permettant d'établir que toute fonction analytique $z$ — en général, non uniforme, — de la variable $x$ peut être définie par une équation de la forme $G(z, x) = 0$, où $G$ est une fonction entière: progrès moins essentiel peut-être que le théorème d'uniformisation, mais, néanmoins, extension importante aux fonctions transcendantes de la propriété fondamentale des fonctions algébriques.

Mais cette méthode est en relation avec les travaux dont nous avons à parler en second lieu, et qui concernent l'étude des fonctions de plusieurs variables.

* * *

Pour celle-ci plus encore que pour la précédente, on peut dire que les impulsions décisives viennent de Poincaré.

Dans cet ordre d'idées, un seul théorème, le «Vorbereitungssatz», avait été antérieurement obtenu. Mais, par deux fois, il était resté ignoré du public scientifique. Weierstrass l'a réservé, comme il le faisait souvent, au cercle restreint de ses auditeurs, jusqu'en 1886, et M. Lindelöf a été le premier à découvrir[1] que le véritable auteur en est Cauchy.

Il peut n'être pas inutile, dans ces conditions, de noter que les résultats relatifs aux fonctions algébroïdes, obtenus par Poincaré dans sa Thèse, équivalent au théorème en question.[2]

Celui-ci d'ailleurs, pour Poincaré comme pour Weierstrass, n'était que préparatoire. L'étude des fonctions de plusieurs variables ne fut véritablement inaugurée que lorsque, peu d'années après, Poincaré réussit à leur étendre le théorème de Weierstrass sur les fonctions *méromorphes*.

Quel que soit le nombre des variables, une telle fonction est caractérisée par la propriété de se comporter au voisinage d'un point quelconque — autrement dit, *localement* — comme une fonction rationnelle. Localement donc, elle s'exprime par le quotient de deux séries entières convergentes dans un rayon suffisamment petit. C'est ce résultat qu'ils s'agit d'étendre à tout l'espace en exprimant la fonction considérée par le quotient de deux séries entières *toujours* convergentes.

Nous avons dit qu'on ne pouvait songer à employer, à cet effet, la méthode qui réussit dans le cas d'une variable. Poincaré recourt encore une fois à la théorie du potentiel ou plutôt à la théorie analogue dans l'espace à quatre dimensions, celle des fonctions $V$ qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 .$$

Cette méthode semble cependant, au premier abord, inapplicable au problème actuel. L'équation aux dérivées partielles précédente ne suffit plus, en effet, à caractériser la partie réelle d'une fonction analytique: cette partie réelle doit

[1] Voir ses *Leçons sur la théorie des résidus* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, note de la page 27).

[2] Ils en fournissent même une extension, dans laquelle, au lieu de l'équation obtenue en égalant une fonction unique à zéro, on considère un système d'équations à plusieurs inconnues.

satisfaire à quatre équations aux dérivées partielles et non à une seule. Il semble donc que la formation d'un potentiel vérifiant l'unique équation ci-dessus écrite soit sans valeur au point de vue du résultat final.

Il n'en est rien: si l'on a obtenu ce potentiel, Poincaré montre qu'il suffit d'y ajouter une fonction régulière convenable pour intégrer l'ensemble des quatre équations mentionnées tout à l'heure et en déduire la fonction qu'il a en vue, à savoir le logarithme du dénominateur cherché.

Quant à la formation du potentiel en question, elle consiste en une sorte de raccordement analytique entre plusieurs fonctions (les logarithmes des dénominateurs des diverses fractions qui représentent localement la fonction donnée) définies chacune dans une portion seulement de l'espace, mais dont les différences mutuelle dans les régions où deux d'entre elles existent à la fois, sont régulières. Ce raccordement, l'emploi de potentiels, tout analogues aux potentiels de simples et de doubles couches, permet de l'opérer. Lorsqu'il s'agit enfin de passer à la limite pour le cas de l'espace indéfini en tous sens, la méthode à appliquer est connue: c'est celle par laquelle on démontre le théorème de M. Mittag-Leffler sur le développement des fonctions méromorphes d'une variable en série d'éléments simples.

Poincaré a eu à revenir sur la démonstration de ce théorème, pour l'adapter à la théorie des fonctions abéliennes. Dans ce cas, en effet, la fonction donnée étant périodique, il importe de diriger le calcul de manière à ce que le numérateur et le dénominateur obtenus possèdent eux mêmes, non la périodicité proprement dite, mais, à la façon des fonction thêta (auxquelles, dès lors, ils se ramènent) — la périodicité de troisième espèce au sens d'Hermite, qui est à la périodicité ordinaire ce que l'invariance relative est à l'invariance absolue. Poincaré reprend, à cet effet, la démonstration de son théorème général, tant celle qu'il avait donnée que celle qui avait été fournie depuis par M. Cousin. Il en indique même, dans le même but, une autre, toute différente de celles dont il vient d'être question par la nature des potentiels employés. Au lieu d'être, dans l'hyperespace, les analogues d'un potentiel newtonien de surface, — comme dans la démonstration primitive — ceux ci peuvent, en effet, être analogues à des potentiels (newtoniens) de lignes attirantes, de sorte que nous devons à cette circonstance la connaissance des singularités (en général logarithmiques) des potentiels de cette espèce.

Un autre point important de la théorie des fonctions d'une variable attirait l'attention au point de vue de son extension au cas actuel: la notion de *résidu*, base des plus belles découvertes de Cauchy. En général, c'est-à-dire dans toute

région ne comprenant pas de points singuliers, l'intégrale d'une fonction analytique le long d'un contour fermé est nulle. Au contraire si ce contour contient à son intérieur un point singulier, l'intégrale est proportionnelle à un certain nombre déterminé, caractéristique et en quelque sorte, mesure de la singularité, qui est le résidu.

Cette pierre angulaire de la théorie de CAUCHY devait être transportée à la théorie des fonctions de deux variables, si l'on voulait fonder utilement celle-ci. Il fallait, à cet effet, considérer les intégrales doubles prises le long de multiplicités fermées de l'espace à quatre dimensions, et montrer tout d'abord que ces intégrales étaient indépendantes de la forme de la surface d'intégration (tant que celle-ci varie continûment sans rencontrer de singularités), une condition d'intégrabilité analogue à celle qui intervient pour les différentielles totales ordinaires étant vérifiée.

Mais ceci fait, le calcul de la valeur de cette intégrale autour d'une singularité donnée, présentait des difficultés inattendues. STIELTJES qui l'avait effectué dans un cas particulier, n'avait pu le publier, le résultat donnant lieu à une objection qui semblait sans réplique. Dans l'intégrale qu'il avait traitée, la quantité sous le signe $\iint$ était de la forme

$$\frac{P}{QR},$$

$P, Q, R$ étant trois polynomes entiers dont les deux derniers s'annulent ensemble sur la singularité considérée. Or STIELTJES trouvait, pour le résidu, une valeur qui change de signe quand on permute entre eux les deux facteurs du dénominateur.

Pour faire cesser cette contradiction apparente, il fallait arriver à une vue exacte et pénétrante des propriétés géométriques d'une figure tracée dans l'hyperespace. POINCARÉ montra ainsi comment l'ordre des deux facteurs en question influe, dans cet exemple, sur le sens de l'intégration.

Ces deux séries de recherches de POINCARÉ restèrent longtemps la seule base des travaux entrepris sur les fonctions de deux variables.[1] Les plus importants, tels que celui de M. COUSIN, dérivent du théorème sur les fonctions méromorphes et fournissent une seconde démonstration de ce théorème.

---

[1] C'est seulement dans ces toutes dernières années que d'autres voies se sont ouvertes avec des travaux parmi lesquels nous nous contenterons de citer ceux de MM. FABER, HAHN, HARTOGS, E. E. LEVI, etc.

Ce vaste domaine des fonctions de plusieurs variables devait, plus tard, offrir encore à Poincaré un autre objet de méditations. La *représentation conforme* offre, dès le cas d'une variable, un remarquable exemple de la différence profonde qui existe entre les propriétés *locales* des fonctions et celles qui interviennent lorsqu'on les considère non plus au voisinage immédiat d'un point, mais dans tout leur domaine d'existence.

Le problème (problème *local*) qui consiste à représenter, par l'intermédiaire d'une fonction analytique, un *arc* (suffisamment petit) d'une courbe donnée $c$ sur un arc d'une autre courbe donnée C a, en effet, une infinité de solutions dépendant d'une infinité d'arbitraires, tandis que le problème *étendu* qui consiste à représenter, dans les mêmes conditions, la courbe fermée $c$ *tout entière*, sur la courbe fermée C (et l'aire $s$ limitée par $c$ sur l'aire $S$ limitée par C) est, au contraire, déterminé à une substitution homographique près.

A cette différence, on aperçoit immédiatement deux raisons: la première résidant dans ce fait que les courbes $c$ et C sont fermées et que dès lors le prolongement de la fonction cherchée tout le long de ces courbes doit présenter par rapport à l'arc de l'une d'elles, par exemple, une périodicité qui n'apparaissait point lorsqu'on se bornait à considérer des parties très petites des courbes en question; la seconde, dans celui que la fonction cherchée ne doit seulement être définie au voisinage de $c$, mais dans tout l'intérieur de $s$.

C'est cette étude que Poincaré transporte au cas de deux variables, en séparant même, par l'introduction d'un problème intermédiaire,[1] (dans lequel on demande que les fonctions cherchées soient régulières sur toute la frontière, mais non dans tout le domaine qu'elle limite) ces deux caractères qui différencient l'un de l'autre le problème local et le problème étendu. Les résultats changent d'ailleurs notablement de forme dans cette extension. Le problème local cesse lui même d'être possible en général. Une infinité de conditions de possibilité apparaissent et ces conditions de possibilité introduisent une série d'invariants différentiels, obtenus en écrivant que la transformation de l'une des frontières données en l'autre est possible, dans la région infiniment voisine d'un point donné, aux infiniment petits du $n^{\text{ème}}$ ordre près.

Ce Mémoire de Poincaré ouvre d'ailleurs la voie à toute une série de recherches où, comme il l'a montré, intervient d'une manière nécessaire l'étude approfondie de certains groupes continus.

* * *

[1] En vertu d'un théorème de M. Hartogs, il se trouve que la solution de ce problème intermédiaire peut être utilisée pour celle du problème étendu.

C'est à ces propositions fondamentales sur les fonctions de plusieurs variables qu'il faut rattacher les résultats obtenus par Poincaré sur les fonctions abéliennes, ceux qui dérivent de l'application des fonctions fuchsiennes exceptés. Leur point de départ est la distinction qu'il établit entre la théorie des *fonctions* abéliennes et celle des *intégrales* abéliennes, théories que, depuis Riemann, on était habitué à confondre l'une avec l'autre.

Si, comme on le sait depuis Riemann, les intégrales des fonctions algébriques s'expriment par le moyen des séries $\Theta$, la solution ainsi obtenue dépasse en quelque sorte le but. Certaines fonctions $\Theta$ correspondent à des problèmes de quadrature de l'espèce indiquée, mais elles sont *spéciales;* il en existe une foule d'autres qui n'ont point une origine de cette espèce.

Quelles sont les relations qui caractérisent ainsi les fonctions thêta spéciales? — et, d'autre part, que peut on dire des autres fonctions thêta?

Mais auparavant, une autre question analogue se présentait, qui s'était déjà posée à Riemann même (lequel l'avait signalée à Hermite), puis à Weierstrass et qui, en même temps que Poincaré, préoccupa MM. Picard et Appell,[1] celle de savoir si les fonctions périodiques obtenues comme quotients de fonctions thêta sont les plus générales parmi celles qui présentent le même nombre de périodes.

Cela est d'autant moins évident que les fonctions thêta ne peuvent pas être formées avec des périodes entièrement arbitraires. Au contraire il ne semble nullement a priori, que la définition des fonctions périodiques doive impliquer, entre ces périodes, une condition quelconque. C'est cependant ce qui a lieu et toute fonction méromorphe $2p$ fois périodique de $p$ variables complexes peut être représentée par un quotient de séries thêta. Poincaré publia sur ce point, en collaboration avec M. Picard, une démonstration qui, un peu plus tard fut reconnue identique à celle qu'avait obtenue Weierstrass. Nous avons dit que le même fait se présenta plus tard à lui comme une simple conséquence du théorème fondamental sur les fonctions méromorphes, moyennant une étude plus approfondie des opérations par lesquelles on établit ce théorème.

Ceci élucidé, il fallait entreprendre l'examen des fonctions thêta indépendamment de toute origine algébrique, pour apprendre à distinguer entre les fonctions thêta appelées plus haut *spéciales* (c'est-à-dire celles qui ont une telle origine) et les autres.

Dans cet ordre d'idées, Poincaré, dès 1883, considère une système de $p$ fonctions thêta à $p$ variables, toutes aux mêmes multiplicateurs, et détermine le

[1] Voir *Analyse*, p. 82.

nombre des solutions (essentiellement distinctes, c'est-à-dire telles que la différence de deux quelconques d'entre elles ne soit pas une période) communes aux équations obtenues en égalant ces fonctions simultanément à zéro.

C'est à cette occasion que Poincaré utilise, pour la première fois, le théorème par lequel Kronecker venait d'exprimer le nombre des solutions d'un système donné, admirable instrument qui semblait avoir été crée en vue d'un tel ouvrier, et que nous retrouverons à tant de reprises dans l'étude de son œuvre. Grâce à lui, il put montrer que le nombre en question ne dépend que du nombre $p$ des variables et du degré des fonctions thêta.

La différence entre le point de vue de Poincaré et celui de ses prédécesseurs apparaît par la comparaison entre cette question et celle que s'était posée Riemann relativement au nombre des zéros d'une fonction thêta du 1er degré. Si, dans une telle fonction, on substitue aux $p$ variables les valeurs des $p$ intégrales abéliennes de première espèce attachées à un même point $M$ de la courbe, on a une équation (à une inconnue, cette fois) qui admet $p$ solutions.

Cet énoncé diffère, on le voit, du précédent, non pas seulement en ce que la fonction thêta considérée doit être spéciale, mais en ce que les variables ne peuvent prendre que des valeurs très particulières, ne dépendant que d'un seul paramètre et non de $p$. Poincaré étend d'ailleurs le résultat de Riemann aux fonctions thêta de degré quelconque (le nombre des solutions devenant alors égal à $np$) et à une série de questions qu'on peut considérer comme intermédiaires entre les deux précédentes.

La relation entre ces différents points de vue est également mise en lumière dans la représentation géométrique qu'il emploie.

Il y a $n^p$ fonctions thêta de degré $n$ ayant de multiplicateurs donnés. Si l'on considère les valeurs de ces $n^p$ fonctions thêta comme des coordonnées homogènes dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions, le point qui a ces coordonnées — point qui reste inaltéré par l'addition aux variables d'une période quelconque, puisque toutes ses coordonnées sont multipliées par la même quantité, — décrit, dans cet espace, une variété $p$ fois étendue $V$. Lorsque les fonctions $\Theta$ sont spéciales et dérivent d'une courbe algébrique $C$, si on remplace les variables par les intégrales abéliennes attachées à cette courbe, on a une courbe $B$ située sur $V$. Le théorème de Riemann étendu par Poincaré montre que cette courbe est algébrique et fait connaitre son degré. Poincaré constate d'ailleurs qu'elle est plane, ou, plus exactement, qu'elle est située sur une variété plane à $(n-1)p$ dimensions. Quant au théorème mentionné plus haut sur les zéros communs à $p$ fonctions $\Theta$, il fait connaitre le degré de la variété $V$, laquelle est algébrique, et cela, cette fois, même si les fonctions $\Theta$ considérées ne sont pas spéciales.

Un seul résultat appartenant à cette catégorie porte, comme celui de Riemann, sur une seule équation à une seule inconnue, tout en n'exigeant pas que la fonction thêta qui y intervient soit spéciale. Il généralise la relation de Legendre entre les périodes des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, relation que la théorie des fonctions nous a montrée dépendant du nombre des zéros de la fonction thêta dans un parallélogramme des périodes. Pour arriver à un résultat présentant ces caractères, il fallait vaincre une difficulté de nature géométrique par laquelle cette recherche se rapproche de celles que Poincaré avait développées sur la théorie générale des fonctions de plusieurs variables.

Après avoir, par son théorème de 1883, étendu une proposition classique sur le nombre des zéros d'une fonction elliptique, Poincaré va plus loin et donne une extension analogue à celle qui fait connaître la somme de ces zéros.

Dès le premier de ces deux théorèmes, on voit intervenir occasionnellement comme auxiliaires les cas de réduction dont nous avons parlé précédemment. Cette première intervention n'est toutefois qu'accessoire, pour ainsi dire: l'emploi du théorème de Kronecker ayant montré, comme nous l'avons dit, que le nombre des zéros communs est constant, l'examen d'un cas de réduction où tout se ramène aux fonctions elliptiques fournit simplement la valeur de cette constante.

Mais c'est seulement avec le théorème sur la somme des zéros que ces fonctions abéliennes réductibles jouent un rôle essentiel et, ainsi que les trajectoires périodiques de la Mécanique céleste auxquelles on pourrait à la rigueur les comparer, sont pour nous, toutes particulières qu'elles soient, le moyen d'atteindre toutes les autres fonctions abéliennes.

Poincaré remarque, en effet, qu'on peut trouver, d'une infinité de manières, des fonctions abéliennes réductibles aussi peu différentes qu'on le veut d'une fonctions abélienne quelconque donnée, de même qu'au voisinage d'une incommensurable donnée, on peut trouver une infinité de nombres commensurables. Il suffit dès lors de résoudre le problème pour les fonctions réductibles, la solution s'étendant immédiatement, par voie de continuité aux fonctions abéliennes quelconques.

Un nouvel emploi des cas de réduction va également permettre d'aborder le problème principal dont nous avons donné tout à l'heure l'énoncé: la recherche des conditions moyennant lesquelles les fonctions thêta sont spéciales.

Ainsi est exploré tout d'abord l'aspect géométrique du problème. Comme on pouvait au fond, l'inférer des recherches de Lie, et comme Poincaré le démontre d'une façon nouvelle et particulièrement intuitive, la condition néces-

saire et suffisante pour qu'un système de fonctions thêta soit spécial est que la variété $S$ dont l'equation s'obtient en égalant l'une d'entre elles à zéro soit de translation et cela de deux manières différentes. L'étude de la courbe dont la translation produit ainsi la variété $S$ n'est autre que celle de la courbe spéciale $B$ dont il a été question plus haut (voir p. 232). On est ainsi conduit à définir cette courbe en adjoignant à l'équation de $S$ un système d'autres équations analogues. Mais, quoique les variétés représentées par ces équations soient en nombre suffisant pour définir par leur intersection une courbe, elles ne fournissent pas uniquement celle que l'on cherche: l'intersection se décompose, et la courbe cherchée n'est qu'une des composantes.

Pour rendre possible l'intelligence complète du mécanisme de cette décomposition, Poincaré est obligé de faire intervenir à nouveau les cas de réduction. La marche suivie en cette circonstance est celle même qui est classique en Calcul infinitésimal: l'étude (au moins l'étude approchée) des cas infiniment voisins d'un premier cas donné dans lequel la solution est connue ou peut être obtenue. Ce cas initial est ici un cas de réduction. Toutefois l'emploi de la méthode est ici particulièrement difficile. Si, en effet, la discussion d'un cas singulier tel que le cas de réduction est ici la seule prise que nous ayons sur le cas général, les mêmes raisons qui nous la rendent accessible font — et nous retrouverons ce fait à propos des équations différentielles — qu'elle nous offre de ce cas général une image plus ou moins fortement déformée, où toutes les propriétés ont en quelque sorte dégénéré. Aussi ne faut il point s'étonner de ne la voir élucidée que par une dissection d'une finesse extrême et d'y trouver les interprétations aussi délicates que l'est pour le naturaliste celle d'organes dont les formes atrophiées ou régressives sont seules accessibles à l'observation.

Mais la condition qui caractérise une fonction abélienne spéciale doit s'exprimer, en dernière analyse, par une relation entre les périodes. C'est la partie la plus difficile du problème, celle pour laquelle Poincaré ne peut fournir qu'un commencement de solution. La méthode précédente donne cependant, sinon la forme complète des premiers membres des relations cherchées entre les périodes, du moins les premiers termes de leurs développements.

* * *

Peut-être convient-il de s'arrêter un instant pour jeter sur ce qui précède un coup d'œil chronologique. La théorie des fonctions fuchsiennes aurait à elle seule suffi pour fonder la gloire de Poincaré. Mais si elle fut d'abord la plus

remarquée, d'autres, parmi les découvertes qui remontent à la même époque, ne lui cèdent nullement en importance et on ne peut enregistrer sans stupéfaction la rapidité avec laquelle elles se succédèrent à partir de 1879, date de la Thèse de doctorat de Poincaré. Parmi celles qui apparurent depuis cette date jusqu'en 1883, nous avons déjà signalé:

les fonctions fuchsiennes;

le théorème fondamental sur le genre, duquel découle toute la théorie des fonctions entières;

l'uniformisation des fonctions analytiques;

la représentation des fonctions méromorphes de deux variables par quotients de fonctions entières;

le théorème sur les zéros des fonctions thêta qui devait donner naissance à la nouvelle théorie des fonctions abéliennes;

l'extension des notions de genre et d'ordre aux formes de degré supérieur. et la notion d'invariants arithmétiques.

Nous avons essayé de donner une idée de l'importance fondamentale de ces différentes découvertes. Mais la plus essentielle peut-être nous reste à mentionner. Nous savons, en effet, que la théorie des fonctions, si grande que soit la place prise par elle dans les mathématiques contemporaines, n'est en somme qu'un moyen. On trouvera naturel, dès lors, que la *théorie des courbes définies par les équations différentielles*, dont nous aurons à parler tout à l'heure, ait eu sur toute l'œuvre de Poincaré et sur toute la marche de la science une influence plus décisive encore que les recherches même dont il a été question jusqu'ici. Or, dans ses deux premières parties, elle remonte à la même époque; et de cette période encore date une courte Note, grosse de toute une révolution dans nos conceptions astronomiques.

En quatre années, dans les domaines les plus divers, dans les directions les plus opposées, quelle armée de découvertes primordiales dont chacune aurait suffi à consacrer une réputation. Encore n'avons-nous cité que celles — et non peut-être toutes — qui marquent comme un tournant pour une branche de la science.

Il n'est pas vrai que le temps ne fasse rien à l'affaire, dans la vie d'un grand savant. N'oublions pas que celle de Poincaré, sans avoir la tragique brièveté de la carrière d'un Galois ou d'un Abel devait être arrêtée en pleine fécondité.

L'accumulation de ces œuvres mémorables — un seul tome du *Bulletin de la Société mathématique de France* renferme trois de celles que nous venons de citer — n'en est d'ailleurs pas la seule caractéristique. Le dieu qui les inspirait manifeste son impatience dans leur style même. Dans nombre d'entre elles, —

particulièrement dans ces trois articles du *Bulletin de la Société mathématique de France* — deux ou trois pages lumineuses autant que concises, suffisent au «veni, vidi, vici» d'un triomphe de l'esprit humain.

## II. Les équations différentielles.

### 1. Les voies classiques.

Le centre de la mathématique moderne est, nous l'avons dit, dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles.

Il nous faut maintenant montrer Poincaré aux prises avec ce double problème et tout d'abord, avec les équations différentielles.

La place n'est point de celles que l'on puisse emporter de haute lutte; il faut l'attaquer successivement sur toute sorte de points et se contenter d'avantages partiels. Essayons d'énumérer les directions à suivre.

I. On peut se préoccuper de perfectionner (spécialement autour des points singuliers) l'étude que nous avons appelée *locale* des solutions.

II. Il faut, d'autre part, savoir découvrir les cas où celles-ci s'expriment à l'aide de fonctions connues. C'était à eux que l'on réduisait le problème aux débuts du calcul infinitésimal. Tout déchus qu'ils soient de cette ancienne importance, il importe de ne pas les laisser échapper lorsque, exceptionnellement, ils existent.

III. A défaut des fonctions déjà existantes, il peut arriver que certaines transcendantes nouvelles, douées de propriétés qui en permettent l'étude et le calcul, gouvernent, d'autre part, une catégorie étendue d'équations différentielles dont elles permettent d'exprimer les intégrales.

IV. On peut étudier les solutions, supposées analytiques, au point de vue de la Théorie des fonctions et chercher les cas où elles se comportent à ce point de vue d'une manière remarquable.

V. On peut essayer de substituer, dans le cas général, aux développements en séries qui conviennent localement, des développements de forme différente valables pour toutes les valeurs de la variable, etc.

Poincaré suivit avec succès toutes ces voies, en même temps que nous le verrons en frayer d'autres sinon entièrement nouvelles, du moins presque inexplorées avant lui, et plus fécondes que les premières.

Sa Thèse marque surtout un progrès essentiel au premier point de vue qui, nous l'avons dit, dominait depuis Cauchy, celui de l'étude locale des solutions.

Elle n'est, en un sens, qu'une généralisation des recherches de Briot et Bouquet sur les points singuliers en lesquels la valeur de $\frac{dy}{dx}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$: généralisation à un système d'équations du premier ordre,[1] au lieu que Briot et Bouquet n'avaient traité qu'une équation unique. Mais ici cette généralisation fait apparaître des résultats de forme toute nouvelle. Dans l'exemple de Briot et Bouquet, un seul coefficient influait sur la forme des résultats, et la discussion ne reposait que sur le signe de ce coefficient. Celle de Poincaré introduit au contraire plusieurs nombres (dépendant, comme le coefficient unique de Briot et Bouquet, des termes du premier degré de l'équation) et les conditions d'inégalité que l'on doit former ne s'expriment aisément que sous forme géométrique, en circonscrivant un polygone convexe au système des points qui ont pour affixes les nombres en question. Le résultat obtenu entraîne dès lors que, considérées comme fonctions de l'un d'eux, les solutions présentent un espace lacunaire (en l'espèce, un polygone rectiligne); c'est l'exemple dont il a déjà été parlé plus haut et qui, comme on le voit, ne pouvait être soupçonné tant qu'on s'en tenait au cas de Briot et Bouquet.

Une autre question qui, bien qu'appartenant à cette première catégorie des études locales, soulève de sérieuses difficultés, non encore complètement surmontées, est le calcul des intégrales irrégulières des équations linéaires, les seules que la méthode de Fuchs ne permette pas d'obtenir. Deux sortes de développements, très semblables au premier abord, complètement différents en réalité, peuvent être proposés pour représenter les solutions: les uns sont convergents, mais on ne sait pas en trouver les termes;[2] les autres peuvent être formés effectivement à l'aide des données de la question, mais ils sont divergents en général.

Poincaré, utilisant une transformation classique dûe à Laplace, montre, comme il le fera bientôt en Mécanique céleste, que ces développements divergents ont une signification: ils font connaître, jusqu'à tel ordre de petitesse qu'on le veut, l'allure de la fonction. De plus, il obtient par la même voie une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait convergence.

Sur un point, — la recherche de la limite vers laquelle tend la dérivée logarithmique de la solution — la méthode employée se rapproche beaucoup de celles

[1] Poincaré considère plus spécialement, dans ce travail, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre équivalente au système.

[2] On connait aujourd'hui, théoriquement parlant, grâce aux Mémoires de M. Helge von Koch, un moyen de combler cette lacune en calculant les termes dont il s'agit: nous dirons plus loin comment ce résultat dérive des travaux de Poincaré lui même

que nous retrouverons plus loin à propos de l'étude, non plus locale, mais générale du problème des équations différentielles; et dans le fait que la question dont nous parlons en ce moment n'est «locale» qu'en apparence réside sans doute la véritable raison des grandes difficultés de cette question qui mériterait encore tant de nouvelles recherches.

La connaissance des cas où l'intégration se fait par les fonctions classiques a également été notablement étendue par POINCARÉ. Il en a été ainsi en particulier en ce qui concerne l'intégration des équation linéaires par les fonctions abéliennes. Mais surtout, il s'est attaqué à la question si simple d'énoncé, si difficile en réalité, qui se posait après les recherches de M. DARBOUX et qui consiste à reconnaître si l'intégrale générale est algébrique. Il a pu, dans plusieurs catégories de cas nouveaux, obtenir le résultat essentiel, la limitation du degré. Ici encore, une partie de ses résultats est due à l'intervention des fonctions fuchsiennes.

Si grandes que soient les difficultés de cette question, on ne doit aujourd'hui, nous l'avons dit, voir là que le petit côté du calcul intégral. Au lieu de rechercher — non sans peine, nous venons de le dire, — si un extraordinaire hasard ne nous a pas mis en face d'une équation intégrable élémentairement, il est autrement important de disposer des transcendantes nécessaires pour intégrer les équations différentielles telles qu'elles se présentent en fait.

A ce point de vue, nul géomètre n'a remporté de victoire plus glorieuse que l'inventeur des fonctions fuchsiennes, qui permettent d'atteindre toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

L'étude des solutions analytiques au point de vue de la théorie générale des fonctions doit à POINCARÉ un travail qui a joué dans les recherches contemporaines un rôle primordial, quoique la conclusion en ait été essentiellement négative. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse imaginer en ce qui regarde la disposition, inconnue en général, des points singuliers des intégrales d'une équation différentielle, celle des équations a points critiques fixes, avait été pour la première fois considérée par FUCHS. Ce savant était parvenu à écrire un système de conditions moyennant lesquelles les points critiques sont les mêmes pour toutes les solutions d'une même équation du premier ordre. Mais il n'y avait là que l'amorce d'une réponse à la question ainsi posée; il restait à savoir quelles étaient les équations différentielles remplissant ces conditions et si, par leurs intégrales, on pouvait être conduit à des transcendantes nouvelles. POINCARÉ, pour qui les équations de cette nature se présentaient nécessairement comme

généralisation naturelle des équations linéaires qu'il venait d'intégrer, montra que toutes se ramènent à des cas déjà étudiés.

Ceci semblait uniquement terminer, sans laisser apercevoir d'issue nouvelle, les recherches de Fuchs.

Il n'en était rien: ce Mémoire, et particulièrement la méthode employée par Poincaré, — méthode sur laquelle nous reviendrons un instant plus loin — devaient servir de base à toute la théorie analytique des équations différentielles que l'on doit à M. Painlevé.

Enfin, dans le cas général, il importe tout d'abord, nous l'avons dit, de former des développements valables pour toutes les valeurs (au moins réelles) de la variable. Aucun résultat de cet ordre n'avait pu être atteint, et on voit quelle transformation essentielle un tel résultat devait opérer dans la question, puisque, jusque là, c'était uniquement à propos d'équations très particulières qu'on avait pu aboutir à autre chose qu'à une étude locale.

Il s'agissait donc déjà de faire faire un pas à la théorie dans une voie toute nouvelle.

Poincaré lui fit franchir ce pas important; il montra qu'il suffit à cet effet d'opérer sur la variable indépendante un changement convenable, après quoi le développement de Taylor lui même répond à la question.

Appliquée au problème des trois corps, cette méthode permet d'obtenir des développements valables pour toutes les valeurs du temps, sauf dans un seul cas d'exception, celui où, au cours du mouvement, deux corps viennent à se choquer.

C'est cette dernière lacune, — laquelle restait assez importante, car on ne sait pas, a priori, avec des circonstances initiales données, si le choc en question peut se produire, et encore moins quand il se produira — que les récents travaux de M. Sundman sont venus combler. L'idée première de sa belle analyse — à savoir, un prolongement analytique de la solution au delà de l'instant du choc, — a elle même, ajoutons le, ses racines dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

Mais Poincaré n'a entendu donner cette application au problème des trois corps qu'à titre d'exemple. Si utiles que puissent être les développements dont nous venons de parler, il ne les considère nullement comme résolvant le problème général. Tout en élucidant celui ci sous les différents aspects qui précèdent, il va montrer, en effet, qu'on en avait oublié d'autres plus difficiles encore, mais assurément non moins importants.

### 2. La théorie qualitative.

Le point de vue nouveau que nous allons voir apparaître est, en réalité, commun à toute sorte de questions mathématiques.

Dans les cas élémentaires, l'expression des inconnues par les symboles usuels fournit, en général, aisément à leur égard tous les renseignements que l'on se propose d'obtenir.

C'est ce qui a lieu pour tous les problèmes mathématiques suffisamment simples. Pour peu que la question se complique, il en est autrement. Dans la lecture, si j'ose m'exprimer ainsi, faite par le mathématicien des documents qu'il possède, Poincaré met en évidence deux grandes étapes, l'une que l'on peut appeler qualitative, l'autre quantitative.

Ici nous citerons les réflexions même qu'il enveloppe à cet égard: «... Pour »étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème »de Sturm, quel est le nombre des racines réelles: c'est la partie qualitative; puis »on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantita»tive de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence »par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spé»ciales, c'est-à-dire qu'on cherche qu'elles sont les branches de courbes fermées, »les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe, on peut »en déterminer exactement un certain nombre de points».

»C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie »de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu »est le suivant: *Construire les courbes définies par des équations différentielles.*

»Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus »grande utilité pour le calcul numérique de la fonction.

. . . »D'ailleurs cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt de »premier ordre. Diverses questions fort importantes d'analyse et de mécanique »peuvent en effet s'y ramener».

La plus importante d'entre elles est bien connue, et son exemple se présente de lui même à tout esprit que préoccupent les progrès de l'Astronomie: c'est la *stabilité du système solaire.* Le fait seul que cette question soit essentiellement qualitative suffit à montrer la nécessité du point de vue dont il s'agit.

Ainsi l'étude qualitative de la variation d'une grandeur ou du déplacement d'un point est indispensable à la fois en elle-même et comme précédant presque nécessairement l'étude quantitative.

Cependant ce point de vue avait été presque complètement délaissé et comme ignoré par les prédécesseurs de Poincaré. Quelques remarquables exceptions sont à citer: la démonstration du théorème de Lagrange sur la stabilité de l'équilibre par Dirichlet; les travaux de Sturm; ceux de Liouville. Mais même ceux d'entre eux qui avaient frappé les géomètres, — ce n'est pas le cas pour tous, nous le verrons plus loin — étaient resté isolés; l'exemple significatif qu'ils donnaient n'avait pas été suivi.

La faute en est, pour une part, au grand développement de la théorie des fonctions analytiques, aux services mêmes qu'elle avait rendus, et qui détournaient complètement les esprits du domaine réel.

En abandonnant cet auxiliaire, Poincaré eut à rompre avec une tradition vieille d'un quart de siècle et à laquelle l'Analyse devait tous ses progrès durant cette période.

D'autre part, la Science se trouvait du coup complètement désarmée en face des hautes difficultés des questions ainsi posées, les premières pour lesquelles cette théorie des fonctions analytiques n'apportait aucune solution.

Comment ces difficultés — ou plutôt certaines d'entre elles, car il reste beaucoup à explorer dans cet immense domaine qui n'était hier encore que mystère pour nous — furent-elles surmontées par Poincaré?

Ici se retrouve une circonstance qui était déjà apparue dans d'autres chapitres de l'histoire des mathématiques.

C'est ainsi que, dans la résolution algébrique des équations, il y eut une première période où l'on porta son attention sur la recherche d'une racine déterminée de l'équation proposée. Mais cette théorie ne passa d'un état en quelque sorte empirique à l'état de perfection logique où l'amenèrent Lagrange, Rufini, Abel, Cauchy, Galois que lorsque l'on se décida, au contraire, à envisager simultanément toutes les racines cherchées. C'est en examinant les relations qui existent entre elles que furent conquis les principes modernes par lesquelles, dans cette question, tout s'éclaire, s'explique et se prévoit.

Dans les premières recherches sur les équations différentielles et exception faite précisément pour certains des travaux que nous citions il y a un instant, on avait généralement étudié une à une les intégrales d'une équation différentielle donnée quelconque: en examinant chacune d'elles, on avait fait abstraction de toutes les autres.

Les mémoires *sur les courbes définies par les équations différentielles* vinrent montrer que ce point de vue était insuffisant et que les solutions d'un système d'équations différentielles, comme les racines d'une équation algébrique, devaient,

même en vue de l'intelligence de chacune d'elles, être envisagées dans leurs rapports mutuels.

Ceci fait comprendre tout d'abord l'importance que prend, dans l'œuvre de Poincaré, le théorème démontré dans le Mémoire de 1889 *sur le problème des trois corps* et dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, relativement à la possibilité de développer les solutions d'un système différentiel suivant les puissances des paramètres qu'il renferme ou qui interviennent dans les données initiales.

L'un des Mémoires mentionnés précédemment relève déjà du principe dont nous parlons, de la considération simultanée de toutes les intégrales d'une même équation différentielle: c'est celui qui traite des équations du premier ordre à points critiques fixes. Si, dans cette question, Poincaré put dégager le résultat décisif qui vidait le débat et qui avait échappé à Fuchs, c'est en considérant les valeurs de l'inconnue $y$ comme fonctions, non plus de la variable indépendante $x$ qui figure avec elle dans l'équation différentielle, mais bien de leurs déterminations initiales $y_0$ pour une valeur fixe $x_0$ donnée à cette variable. La solution du problème est précisément due à ce que, entre $y$ et $y_0$, existe une correspondance birationnelle.

Nous verrons plus loin une autre série de découvertes de Poincaré partir du même principe, je veux parler des recherches relatives à la figure d'équilibre du fluide en rotation. Tous les progrès qu'il réalise sur cette question sont dus à ce qu'il n'envisage pas une des figures d'équilibre cherchées en elle-même, mais bien dans ses relations avec les figures d'équilibre voisines.

Poincaré procède dans le même esprit, pour l'étude des équations différentielles réelles, dès le premier cas auquel il s'attaque. Ce cas est le plus simple de tous, celui d'une équation unique du premier ordre et du premier degré, donnant $\frac{dy}{dx}$ en fonction rationnelle de $x$ et de $y$.

Quelles données possède-t-on sur les relations qui existent entre les différentes courbes intégrales de la même équation? Une seule apparaît au premier abord: le fait que deux quelconques de ces courbes, si elles ne coïncident pas, ne peuvent se couper, sauf en certains point singuliers.

Ceci à défaut de toute autre considération, montrait la nécessité de discuter à part les points dont il s'agit. C'est encore une question locale, qui, en un sens, n'est pas nouvelle (c'est elle que Briot et Bouquet avaient traitée dans le cas des équations différentielles à coefficients analytiques) mais qu'il fallait reprendre, avec quelque difficultés nouvelles, du moment que la distinction entre le réel et l'imaginaire s'imposait.

Dès cette première étude, on aperçoit combien le nouveau point de vue est nécessaire et combien vaines étaient les anciennes recherches, celles qui avaient en vue l'intégration formelle.

Les points singuliers qu'elle fait apparaître sont, en effet, de quatre espèces:

1° les *noeuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes définies par l'équation différentielle;

2° les *cols*, autour desquels les courbes cherchées ont une disposition analogue à celle des hyperboles $xy = \text{const.}$;

3° les *foyers*, autour desquels ces courbes tournent en s'en rapprochant sans cesse à la façon d'une spirale logarithmique;

4° les *centres*, autour desquels ces courbes sont fermées et s'enveloppent mutuellement en enveloppant le centre à la façon d'ellipses homothétiques et concentriques.

Parmi toutes ces dispositions, quelles sont celles que l'on peut rencontrer lorsqu'on peut écrire l'intégrale générale de l'équation?

Il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer l'exemple le plus familier que l'on puisse prendre à cet égard, celui des *lignes de niveau* sur une surface topographique quelconque. Il est clair que de telles lignes peuvent être considérées comme définies par une équation différentielle du premier ordre, dont l'intégrale générale est connue et s'obtient en égalant l'altitude à une constante arbitraire.

Quant aux points singuliers de cette équation, ils ne peuvent être ici que de deux espèces:

des *cols*, à savoir les points mêmes que la topographie désigne sous ce nom;

des *centres*, à savoir les fonds et les sommets du terrain.

Non seulement ces deux sortes de points singuliers sont les seules qui se présentent dans le problème des lignes de niveau, mais il en est de même toutes les fois que l'équation a une intégrale générale telle que

$$F = \text{const}^{\text{te}},$$

$F$ étant une fonction holomorphe, ou plus généralement une fonction bien déterminée et partout finie.[1] Les points singuliers sont ceux où les deux dérivées partielles de $F$ s'annulent à la fois: on a ainsi un centre lorsque $F$ est maximum ou minimum, un col dans le cas contraire.

---

[1] Un noeud peut exister même si l'intégrale générale est univoque $\left(\text{exemple; } \frac{y}{x} = \text{const.}\right)$; mais alors cette intégrale $F$ s'y présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et peut y prendre des valeurs aussi grandes qu'on le veut.

Or si maintenant nous revenons à l'étude directe d'une équation différentielle quelconque, nous constatons que, des quatre espèces de points singuliers énumérés plus haut, trois se rencontrent dans le cas général (elles sont caractérisées par certaines conditions d'inégalité entre les termes de plus bas degré de l'équation au voisinage du point singulier): ce sont les nœuds, les cols, et les foyers.

Mais il en est tout autrement des centres, c'est-à-dire des seuls points singuliers qui, avec les cols, puissent se rencontrer, comme nous l'avons vu, dans le cas d'une intégrale générale uniforme et finie. Ces centres sont des points singuliers tout exceptionnels. Pour que l'un d'eux se présente, il faut qu'une infinité *d'égalités* (auxquelles conduit le calcul du développement en série de la fonction $F$) soient vérifiées.

C'est ce qui ne saurait avoir lieu pour une équation écrite au hasard, et même si cela était, il serait impossible de s'en assurer par un nombre fini d'opérations (du moins en l'absence de données particulières sur les propriétés de l'équation).

En dehors des points singuliers, on peut utiliser sans restriction la propriété fondamentale rappelée tout d'abord et d'après laquelle deux courbes intégrales dinstinctes ne se croisent pas.

Ce point de départ, si ténu qu'il soit, donne à lui tout seul la solution du problème difficile qui nous occupe. Il suffit, à cet effet, de l'appliquer, non seulement à des courbes, complètement différentes, mais à des arcs convenablement choisis d'une même courbe intégrale.

Mais si la méthode employée est, au fond, très simple, les résultats sont tout à fait imprévus et montrent encore que la solution n'était aucunement préparée par toutes nos connaissances antérieures sur ce sujet.

Dans le cas des lignes de niveau, toutes les courbes cherchées sont fermées.

C'est ainsi que l'on serait presque fatalement amené à se figurer les choses si l'on voulait s'en faire une idée d'après les cas où l'on sait écrire l'intégrale générale. C'est ainsi, en effet, qu'elles se passent toutes les fois que cette intégrale $F$ est uniforme (ou même uniforme au point de vue réel, c'est-à-dire bien déterminée en tout point réel) et partout finie. Tout au plus, en considérant des formes fractionnaires de $F$, peut-on, comme nous l'avons vu, obtenir des courbes intégrales aboutissant à des nœuds.

Que cette vue elle même soit trop simpliste, à moins de compliquer encore notablement l'expression de $F$, c'est ce que l'on reconnaît dès l'exemple des lig-

nes de pente. Ici on ne peut déjà plus, en général, obtenir l'intégrale élémentairement, mais il est évident que les lignes en question partent des sommets et aboutissent aux fonds (exception étant faite, toutefois, pour certaines d'entre elles, les lignes de faîte, qui aboutissent à un col).

Seulement, il y a, en général, plusieurs fonds et plusieurs sommets, et c'est l'un ou l'autre des fonds qui sert de point d'arrivée, suivant celle des courbes intégrales que l'on envisage: le passage des courbes qui aboutissent à un fond déterminé à celles qui aboutissent à un fond voisin se fait par l'intermédiaire d'une ligne de faîte.

Des dispositions de cette espèce sont déjà peu usuelles pour les équations différentielles dont l'intégrale générale a pu être écrite élémentairement.

Mais les résultats obtenus par Poincaré dans le cas général présentent un degré de complication de plus. Il existe alors un certain nombre de courbes intégrales qui sont des courbes fermées (des *cycles*, suivant la terminologie qu'il emploie). Toutes les autres, sauf celles qui aboutissent à des points singuliers,[1] s'enroulent asymptotiquement autour de certains de ces cycles, dits *cycles limites*. L'enroulement a d'ailleurs lieu autour de l'un ou de l'autre des cycles limites, suivant que la courbe intégrale considérée est située dans l'une ou l'autre de certaines régions déterminées.

Rien de tout cela ne pouvait être prévu à l'aide des exemples traités antérieurement. Non seulement ceux-ci donnaient une idée fausse des choses; mais, on le voit, il était inévitable qu'il en fût ainsi.

Nos résultats sont, en effet, plus encore que tout à l'heure, contradictoires avec l'existence d'une intégrale générale que l'on puisse écrire avec les procédés élémentaires. Ils ne pouvaient, par conséquent, se rencontrer dans les problèmes que l'on avait résolus avant Poincaré. L'opinion s'était faite, jusque-là sur des figures exceptionnelles, dégénérées en quelque sorte, parce que c'étaient les seules que l'on avait su tracer.

Ces résultats si extraordinaires demandaient à être complétés par la recherche *effective* des cycles limites lorsque l'équation est donnée. C'est une question d'une extrême difficulté, même si l'on entend se borner à une détermination approximative.

Poincaré triomphe plus ou moins complètement de cette difficulté, suivant les cas. Pour des équations de forme convenable[2], il détermine exactement le

---

[1] Dans le cas des lignes de pente, ces dernières existaient seules. Cet exemple et autres analogues (tels que les lignes de force du spectre magnétique) étaient donc, eux aussi, incapables de faire prévoir la solution générale.

[2] Voir *Analyse*, p. 59.

nombre des cycles limites et obtient certaines régions dans lesquelles chacun d'eux doit nécessairement se trouver.

Il emploie, à cet effet, un second principe qui était déjà intervenu dans son étude des points singuliers et qui sert de fondement à toutes les autres recherches entreprises sur ce genre de questions.

Analytiquement, il consiste à chercher le sens dans lequel varie une fonction convenablement choisie des coordonnées, lorsqu'on se déplace le long d'une courbe intégrale. On sait avec quel succès un principe de cette nature fut appliqué, peu d'années après, par M. Liapounof, dans son célèbre Mémoire sur la stabilité du mouvement.

Poincaré l'applique, non seulement à une trajectoire déterminée, mais à toutes celles qui traversent une courbe donnée. Géométriquement parlant, cela revient à considérer en chaque point d'une courbe arbitrairement donnée, le sens dans lequel elle est traversée par la courbe intégrale qui passe en ce point. Ce sens, qui peut être déterminé par des opérations élémentaires du moment que l'équation différentielle est donnée, ne change qu'en un point où les deux courbes sont tangentes. On comprend dès lors l'importance que prennent, dans la discussion, les courbes fermées ou cycles «sans contact» c'est-à-dire qui ne sont tangents en aucun de leurs points à une courbe intégrale et le long desquels, par conséquent, ce sens ne peut changer.

La manière dont varie, le long d'une courbe fermée quelconque, le sens dont il s'agit, est d'ailleurs liée à la disposition et à la nature des points singuliers de l'équation par une relation simple qui est d'un grand secours dans les discussions dont nous venons de parler, et que Poincaré retrouvera lorsqu'il passera aux équations d'ordre supérieur. Les considérations qui la fournissent équivalent, au fond, au théorème de Kronecker mentionné plus haut et que plus tard Poincaré introduira explicitement.

Les résultats précédents ne subsistent pas pour toutes les équations du premier ordre et de degré supérieur au premier en $\frac{dy}{dx}$; mais ils s'étendent cependant d'eux-mêmes à un grand nombre d'entre elles.

Ce n'est pas, en effet, le degré qui joue ici un rôle essentiel: Poincaré rencontre une notion qui était apparue une première fois dans la science avec Riemann, mais dont les recherches que nous résumons en ce moment devaient montrer la véritable signification. C'est la *géométrie de situation*, la science des propriétés géométriques qui ne changent pas quelles que soient les déformations subies par une figure, pourvu qu'il n'y intervienne ni déchirure, ni soudure.

Tant que l'on se borne au point de vue local, rien ne fait prévoir la nécessité d'une pareille étude. Sinon toutes les figures que les géomètres ont pu imaginer, du moins toutes celles dont ils se sont servis effectivement soit pour les étudier en elles-mêmes soit pour représenter des relations analytiques, sont identiques entre elles au point de vue de la géométrie de situation lorsqu'on se borne à les considérer dans leurs portions suffisamment petites, pourvu qu'elles aient simplement le même nombre de dimensions: par exemple, toute portion suffisamment restreinte de surface quelconque peut être remplacée à ce point de vue par un petit disque circulaire.

Aussi cette découverte est-elle de celles qui se firent le plus attendre. La théorie des fonctions algébriques, à laquelle elle est indispensable, avait été inlassablement étudiée et perfectionnée avant que la nécessité en fût aperçue: cette nécessité avait échappé à Cauchy lui-même.

Puis, lorsqu'à cette occasion, Riemann l'eut mise en évidence d'une manière éclatante, ses successeurs ne virent point que la portée de ce principe n'était pas limitée à la circonstance particulière qui l'avait fait apparaître.

Mais, après le second exemple fourni par Poincaré, cette portée est clairement établie. Elle est indissolublement liée à ce passage du local au général qui est la grande préoccupation du Calcul infinitésimal. Dans tout passage de cette nature, on peut s'attendre à voir la géométrie de situation jouer son rôle.

Pour l'appliquer au problème qui nous occupe, on doit regarder $x$, $y$, et $\frac{dy}{dx}$ comme trois coordonnées cartésiennes et considérer la surface définie, dans ces conditions, par l'équation différentielle. Quel que soit le degré de celle-ci, si cette surface est de genre zéro, c'est-à-dire a une forme analogue à celle d'une sphère, on aura, pour les courbes intégrales, la même disposition générale que dans l'équation du premier degré.

Pour d'autres formes de surfaces les conclusions peuvent être totalement différentes. Lorsque, après l'étude de la sphère, Poincaré entrepend, au même point de vue, celle du tore, il constate que ce second cas peut offrir une foule de circonstances nouvelles que le premier ne permettait nullement de prévoir. Encore s'en faut-il qu'il arrive toujours à déterminer exactement ce qui se passe. Les difficultés, elles aussi, sont nouvelles, et telles qu'il est obligé de se poser un certain nombre de questions sans les résoudre.

Ces questions, qui soulèvent des problèmes ardus d'arithmétique, sont, depuis, restées sans réponse.

Avec le cas du second ordre, qui fait l'objet du quatrième et dernier Mémoire de cette série, ce sont déjà les difficultés du cas général qui sont abordées. Les

remarques faites dans le cas précédent subsistent, mais ne suffisent plus, à elles seules, à résoudre le problème.

Celui-ci étant mis sous la forme de la recherche de courbes tracées dans l'espace ordinaire et vérifiant un système de deux équations du premier ordre, Poincaré généralise sans difficulté la classification des points singuliers obtenue pour une équation du premier ordre unique.

Il existe encore une relation entre leur distribution et les *surfaces fermées sans contact*, qui sont ici les analogues des cycles sans contact, c'est-à-dire les surfaces qui ne sont tangentes, en aucun de leurs points, à une courbe intégrale. Seulement, cette fois, la relation en question ne pourrait être démontrée si Poincaré ne partait de la formule de Kronecker.

C'est surtout dans la théorie actuelle, en effet, que cette formule se présente comme l'auxiliaire indiqué et même indispensable dont l'apparition, à l'heure même où l'œuvre de Poincaré allait naître, semble répondre à une sorte d'harmonie préétablie. Deux caractères: la manière dont il dépasse d'emblée le domaine local et, d'autre part, le peu d'hypothèses qu'il implique, font que nul autre n'a pu, jusqu'ici, lui être substitué à ce point de vue.

Poincaré en a notablement augmenté la puissance par une remarquable proposition qui, dans beaucoup de cas, dispense même du calcul de la formule en question. Celle-ci, — si, pour fixer les idées, nous la considérons dans l'espace ordinaire — fait, comme on le sait, intervenir un système de trois fonctions $F$, $G$, $H$ et exprime le nombre des zéros communs à ces trois fonctions dans un volume déterminé $V$ (ces zéros étant comptés avec des signes convenables) à l'aide des valeurs que les fonctions en question prennent sur la frontière $S$ de ce volume.

Or, Poincaré trouve une condition très simple et très générale moyennant laquelle on est certain que le nombre ainsi obtenu ne change pas lorsqu'on remplace le système des fonctions $F$, $G$, $H$ par un autre analogue quelconque $f, g, h$. Ou bien, en effet, on peut affirmer que le nombre en question restera inaltéré dans cette substitution, ou bien il existera sur $S$, au moins un point où $F, G, H$ seront proportionnels à $f$, $g$, $h$ et cela même avec un facteur de proportionnalité de signe connu à l'avance. Cette proposition a été obtenue à nouveau, un peu plus tard, sous une autre forme et avec une autre démonstration, par M. Bohl, à qui elle a fourni toute un nouvelle série de résultats dynamiques.

Elle s'applique immédiatement aux surfaces fermées sans contact, en prenant $f$, $g$, $h$ proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à une telle surface $S$. Le nombre trouvé par la formule de Kronecker dépend alors de la *courbure totale* de $S$.

Mais cette première conclusion se simplifie encore, et tout se ramène à une question de géométrie de situation, la courbure totale ainsi introduite dépend uniquement du genre de $S$. Les résultats de ce type devaient donner lieu, on le sait, à d'importantes recherches de M. W. Dyck.

Avec le cas du second ordre apparaissent également les deux notions qui ont eu sur l'œuvre de Poincaré, dans le domaine de la Mécanique et, particulièrement, de la Mécanique céleste, la plus grande influence.

L'honneur d'avoir recherché spécialement, entre toutes les solutions des équations différentielles du mouvement des planètes, une *solution périodique*, telle, autrement dit, que les différents corps mobiles décrivent des courbes fermées (tout au moins par rapport à un système d'axes convenablement choisi) — revient à l'astronome Hill, qui a donné un premier exemple remarquable à cet égard, en ce qui concerne le problème de trois corps.

Mais c'est à Poincaré qu'il appartient d'avoir montré dans les solutions périodiques un instrument, l'un des plus puissants dont on dispose, pour la recherche et l'étude des autres solutions.

Que les solutions périodiques soient capables de jouer ce rôle capital, c'est ce que, après les réflexions qui précèdent, nous pouvons faire comprendre d'un mot. Une courbe intégrale fermée déterminée étant supposée connue, Poincaré considère toutes les courbes intégrales voisines de celle-là.

On voit immédiatement qu'une telle question est à cheval sur les deux points de vue entre lesquels pivote toute la théorie des équations différentielles; et cela, en combinant les avantages de tous deux. Accessible aux mêmes procédés qui s'appliquent au domaine local, elle est d'emblée cependant en dehors de ce domaine, puisque les nouvelles trajectoires obtenues n'évoluent nullement au voisinage d'un point unique et sont étudiées sur des parcours aussi étendus que la solution périodique primitive elle-même.

Ainsi s'explique comment les solutions périodiques «se sont montrées la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable».[1]

En faisant pour le voisinage d'une solution périodique ce que nous avons fait pour le voisinage d'un point unique, c'est la même marche ascensionnelle que nous entreprendrons, mais avec un point de départ plus élevé.

Cette identité de méthode se vérifie bien lorsqu'on examine le détail des opérations. De même que tout le calcul infinitésimal repose sur la comparaison

[1] Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

approchée des valeurs d'une fonction en un point et aux points infiniment voisins, on commencera par étudier, en vue du nouveau problème, les solutions infiniment voisines d'une solution donnée.

En prenant l'écart entre les deux solutions comme un infiniment petit principal et en en négligeant les puissances supérieures à la première, on est conduit ainsi, avec Poincaré, à introduire systématiquement les équations linéaires qu'il a appellées *équations aux variations* pendant que, de son côté, M. Darboux qui en a, lui aussi, découvert l'importance, leur donnait le nom d'équations *auxiliaires*.

Si la solution prise comme point de départ est périodique, il en est de même des coefficients des équations aux variations. Poincaré se trouvera ainsi ramené quel que soit l'ordre, à des systèmes dont les propriétés sont connues et dépendent essentiellement de certaines constantes qui vont jouer un rôle essentiel dans ses recherches dynamiques, les *exposants caractéristiques*. A chacun de ceux-ci correspond, pour le système, une solution possédant, non pas la périodicité proprement dite, mais une périodicité relative (périodicité de seconde espèce, au sens d'Hermite) caractérisée par le fait que toutes les valeurs des inconnues sont multipliées par un même facteur constant lorsque la variable augmente d'une quantité égale à la période des coefficients.

Par ces exposants caractéristiques se trouveront ainsi définies les principales relations entre une solution périodique et les solutions infiniment voisines. En particulier, toutes les propriétés analytiques de l'équation auront leur répercussion sur celles de ces exposants.

Cette étude prépare celle des courbes intégrales *suffisamment* (et non plus infiniment) voisines de la courbe fermée donnée. Poincaré entreprend cette dernière, en ce qui regarde le second ordre, dès le Mémoire dont nous parlons. L'analogie que nous avons essayé de faire ressortir tout à l'heure se manifeste d'une manière tout à fait imprévue dans les résultats. La disposition des courbes nouvelles $L'$ autour de la courbe primitive $L$ rappelle d'une manière frappante les formes rencontrées précédemment dans l'étude des équations *du premier ordre* au voisinage immédiat d'un point singulier.

Imaginons, en effet, en un point quelconque $P$ de $L$, un petit élément de surface normal a $L$. Toute courbe intégrale $L'$ suffisamment voisine de $L$ percera cet élément de surface en un nombre infini ou, en tout cas, très grand de points successifs $P'$.

La figure formée par ces points suffit à nous faire connaitre la disposition des arcs successifs de la seconde courbe intégrale $L'$. Chacun d'eux nous renseigne

en effet, sur l'arc qui le contient, puisque tous ces arcs, de part et d'autre de notre surface, cheminent plus ou moins parallèlement les uns aux autres et à la courbe primitive.

Si maintenant on joint chacun des points $P'$ au suivant, on aura une ligne, variable d'ailleurs avec celle des courbes $L'$ que l'on considère: c'est la disposition de ces lignes qui est tout analogue à celle des courbes intégrales d'une équation du premier ordre autour d'un point singulier.

Poincaré met d'ailleurs en évidence la raison de ce parallélisme. Elle doit être cherchée dans l'étroite parenté qui existe entre l'étude des équations différentielles et celles, beaucoup moins avancée, des équations aux différences finies. Ce n'est pas la première fois que Poincaré éclairait, par le même rapprochement, cette dernière question. Les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires (voir p. 237) lui avaient fourni une illustration du même principe, dont les travaux ultérieurs devaient montrer la fécondité.

Conformément à l'analogie dont il vient d'être parlé, il y a quatre dispositions principales possibles, correspondant aux quatre espèces de points singuliers de l'équation du premier ordre. Les exposants caractéristiques permettent (ainsi que le faisaient précédemment les coefficients des termes de plus bas degré autour du point singulier) de reconnaître trois d'entre elles, celles qui correspondent aux noeuds, aux foyers, et aux cols.

Dans chacune de celles ci, la même analogie nous montre que les points $P'$ peuvent aller en se rapprochant indéfiniment de $P$ (puisque, dans chacune des trois hypothèses correspondantes relatives à l'équation du premier ordre, tout ou partie des courbes intégrales aboutissent au point singulier). On voit alors que toute la nouvelle courbe $L'$ va en se rapprochant indéfiniment de $L$, du moins si on la suit dans un sens convenable, ainsi que le faisaient tout à l'heure les courbes intégrales de l'équation du premier ordre vis à vis des cycles limites: c'est une *solution asymptotique*. Il peut en être ainsi quel que soit le choix de la courbe $L'$ dans le voisinage de $L$ (ou, ce qui revient au même, celui du point $P'$ initial dans le voisinage de $P$): c'est le cas correspondant à celui d'un nœud ou à celui d'un foyer.

Dans le cas correspondant à celui des cols, au contraire, le point $P'$ doit être choisi d'une façon convenable, à savoir sur l'une ou l'autre de deux courbes qui se croisent en $P$ (de sorte que les courbes intégrales asymptotiques à $L$ se distribuent sur l'une ou l'autre de deux surfaces passant par $L$). Une page du quatrième Mémoire *sur les courbes définies par les équations différentielles* résout, par une remarquable application du Calcul des limites de Cauchy, la question, en réalité difficile, du calcul de ces courbes et transforme ainsi la

théorie des équations aux différences finies en intégrant une des catégories les plus étendues d'équations de cette espèce qu'il ait été possible de traiter jusqu'ici.

Plus tard, lorsqu'il eut à passer au problème des trois corps, cette même recherche se présenta à lui pour des systèmes d'ordre supérieur au second. La généralisation, remarquons-le, n'était pas évidente ou, plus exactement, ne l'aurait pas été sans le complément que la Thèse de Poincaré avait préalablement apporté à l'étude des systèmes différentiels au voisinage des points singuliers. Nous savons, en effet, que, dans ce cas, l'introduction de plusieurs inconnues crée une difficulté d'un genre nouveau dont on ne savait pas triompher avant le travail en question. C'est donc grâce à lui qu'il peut démontrer l'existence de ces solutions asymptotiques qui sont une importante conquête de la Mécanique analytique.

Jusqu'au moment dont nous parlons, d'ailleurs, celle-ci n'a pas été envisagée d'une manière spéciale. Les résultats précédents concernent un système quelconque d'équations différentielles.

### 3. Les cas des équations de la Dynamique.

Les propriétés particulières des équations de la Dynamique apparaissent une première fois dès le quatrième Mémoire *sur les courbes définies par une équation différentielle*, et cela, à propos de la dernière hypothèse qui reste à examiner relativement aux courbes $L'$, d'après l'analogie même qui nous a guidés jusqu'ici: c'est celle qui correspondrait, pour l'équation du premier ordre, au cas d'un centre.

La disposition correspondante, pour le problème actuel, est celle où les points $P'$ sont disposés, autour de $P$, le long d'une ligne fermée, la même pour chaque courbe $L'$, les diverses lignes formées ainsi obtenues s'emboîtant les unes les autres autour de $P$.

Notre courbe primitive $L$ sera alors entourée d'une famille de surfaces fermées tubulaires (analogues aux tores contenant à leur intérieur une circonférence de l'espace) telles que chacune d'elles soit un lieu de courbes intégrales.

Absolument comme lorsqu'il s'agissait d'un centre, une telle disposition implique, comme condition nécessaire, l'évanouissement d'une infinité d'expressions constantes $C$.

C'est seulement si toutes ces constantes $C$ sont nulles que les développements trigonométriques figurant dans l'équation polaire des courbes lieux du point $P'$ — et, par conséquent, dans celle des surfaces tubulaires — pourront être écrits.

Or c'est ce que, en l'absence d'autres renseignements, les calculs ne permettent jamais d'affirmer, si loin qu'on les pousse.

Pour les équations de la Dynamique il en est autrement, et l'on sait *a priori* que toutes les constantes $C$ sont nulles.

Pour le démontrer, un nouveau principe intervient, la notion d'*invariant intégral*. Cette fois encore il s'agit, mais sous une nouvelle forme, de la considération simultanée des différentes courbes intégrales et des relations qu'elles ont entre elles.

Représentons nous notre système d'équations différentielles comme définissant le mouvement d'une molécule fluide. Au lieu de considérer une seule trajectoire, c'est-à-dire le mouvement d'une molécule unique et déterminée, on considérera toutes les molécules qui, à un instant déterminé $t$, remplissent un volume déterminé $V$ de l'espace (plus exactement de l'espace à $2n$ dimensions, s'il s'agit d'un problème de dynamique dans lequel l'état du système à étudier dépende de $n$ paramètres).

Si maintenant on considère les nouvelles positions de ces mêmes molécules à un instant ultérieur $T$, celles-ci rempliront un nouveau volume $V'$.

Or, dans le cas des équations de la Dynamique, quel que soit $T$, ce nouveau volume est équivalent à l'ancien. Autrement dit $V$ reste constant lorsque le temps varie: c'est, dans la terminologie de Poincaré, un *invariant intégral.*

Ainsi qu'il a été reconnu ensuite, cette belle découverte, qui est, au fond, une, propriété de la notion de multiplicateur, est déjà ancienne: on doit la faire remonter à Liouville.[1]

Mais, lors de sa première apparition, elle était passée inaperçue. Un autre inventeur génial l'avait même — tant elle joue un rôle essentiel dans toute recherche profonde de Dynamique — rencontrée à son tour sur son chemin: Boltzmann l'avait énoncée (1871), ignorant le résultat de Liouville comme Poincaré a ignoré l'un et l'autre; elle est, depuis cette date, à la base de toutes les théories cinétiques.[2]

Mais à ce premier invariant intégral, Poincaré en joindra toute une série d'autres dont il indiquera les relations avec le premier. Le «volume», considéré tout à l'heure, s'exprime par une intégrale d'ordre $2n$ étendue à une portion de l'espace. Poincaré constate que toute une série d'intégrales de tous les ordres,

---

[1] Journal de Mathématiques t. 3, 1838; p. 348.

[2] Le théorème de la stabilité à la Poisson, l'une des applications les plus importantes des invariants intégraux, a été également énoncé et démontré par Gibbs, mais en 1898 seulement. Il ne se trouve pas, à notre connaissance, dans les travaux de Boltzmann.

c'est-à-dire simples, doubles, etc., le volume n'étant que la dernière d'entre elles, possèdent la même propriété d'invariance.

Quoiqu'il se soit jusqu'ici montré le plus fécond, les autres invariants que Poincaré a formés et dont il établit qu'ils se déduisent tous les uns des autres (en particulier de l'invariant intégral simple) constituent autant de propriétés importantes des équations de la Dynamique.

Dans le Mémoire qui nous occupe actuellement, le volume suffit à trancher la question relative aux constantes $C$ ci-dessus mentionnées, c'est-à-dire à montrer que toutes ces expressions sont nulles. La liaison entre ces deux faits est encore dûe à la notion de surface sans contact: elle résulte de ce que, en présence d'un invariant intégral, une surface fermée sans contact ne peut exister. Or, comme le prouve Poincaré, on en pourrait tracer autour de la courbe donnée si l'une quelconque des constantes $C$ était différente de zéro.

Avec l'analyse précédente, Poincaré entre de plain-pied dans le domaine de la Mécanique céleste.

Les développements en séries qui peuvent être écrits grâce aux conditions $C = 0$ sont, pour ce problème particulier, ceux par lesquels Lindstedt s'est proposé de représenter les éléments des orbites planétaires et les conditions dont il s'agit ne sont autres que celles qui, dans cette méthode, permettent de faire disparaître les termes séculaires.

C'est, au fond, dans l'existence des invariants intégraux que réside, par conséquent, la véritable raison de la validité (au point de vue formel) de la méthode de Lindstedt, validité qui est d'ailleurs établie sans les hypothèses restrictives que Lindstedt lui-même était obligé de faire.

Les questions qualitatives liées aux calculs précédents sont des questions de stabilité tout analogues à celles qui préoccupent les astronomes.

Poincaré nous a appris à distinguer plusieurs sens du mot «stabilité» et nous a montré la fécondité de celui que Poisson avait substitué à l'acception primitive de Lagrange. Toutes les fois qu'il existe, dans le voisinage de $L$, un système de surfaces fermées sans contact, les courbes $L'$ ne pourront jouir de la stabilité à la Poisson, c'est-à-dire qu'elles ne repasseront pas dans le voisinage immédiat de leur point de départ. C'est, nous l'avons vu, ce qui arriverait si l'une des constantes $C$ était différente de zéro.

L'instabilité (toujours au sens de Poisson) est également la règle pour les courbes $L'$ asymptotiques à $L$, telles qu'elles se présentent dans les trois premières hypothèses examinées précédemment.

Au contraire, dans l'hypothèse actuelle — et du moment que toutes les constantes $C$ sont nulles — la stabilité devient possible.

Des conclusions analogues s'appliquent à la stabilité de la trajectoire primitive $L$ elle même. Mais le sens que l'on doit adopter alors (et que Poincaré adoptera également en Mécanique céleste, lorsqu'il étudiera, au point de vue de la stabilité, les solutions périodiques) est encore différent des deux premiers.[1] C'est celui qui avait déjà été considéré dans plusieurs cas importants par les auteurs anglais, mais qui n'a été précisé d'une manière complète et générale que quelques années après, par M. Liapounof, dans le Mémoire déjà cité *sur la stabilité du mouvement* où le géomètre russe a repris, pour les systèmes dépendant d'un nombre quelconque de variables, les questions mêmes dont nous parlons en ce moment. Au lieu que la stabilité à la Lagrange ou à la Poisson est une propriété intrinsèque d'une solution déterminée, la stabilité à la Liapounof, seule analogue d'ailleurs à la notion d'équilibre stable, concerne l'écart entre cette solution et les solutions voisines.

Mais, en raison même de la signification astronomique de ses résultats, Poincaré se trouve du même coup aux prises avec les difficultés fondamentales de la Mécanique céleste, et particulièrement avec la plus classique d'entre elles, celle des «petits diviseurs». Dans le cas du premier ordre, le fait, supposé établi, de l'évanouissement des constantes $C$ aurait suffi pour mettre en évidence d'une manière certaine l'existence d'un centre: car Poincaré démontre la convergence du développement en série que l'on peut écrire dans ces conditions. Il n'en est plus de même cette fois. Nos calculs nous permettent d'écrire le développement; mais les petits diviseurs interviennent: ce développement peut n'être et n'est en général, que formel, de sorte que l'existence des surfaces tubulaires n'est nullement démontrée.

Par l'examen de ces difficultés, les Mémoires *sur les courbes définies par les équations différentielles* inaugurent l'immense œuvre dynamique et astronomique de Poincaré.

* * *

Cette œuvre se poursuit dans l'ouvrage qui devait être pour la jeune gloire de son auteur une consécration mondiale. C'est avec le Mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* que Poincaré remporta le prix dans le grand concours international ouvert à Stockholm en 1889, entre les Mathématiciens du monde entier.

[1] Toute solution périodique est, par définition, stable au sens de Lagrange ou de Poisson.

Le grand traité intitulé: *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* prolonge à son tour les deux Mémoires précédents: c'est dans ces trois ouvrages, et aussi dans une série d'articles insérés au *Bulletin Astronomique*, que se développent les idées de Poincaré sur le problème des $n$ corps.

Il sera parlé ici même de ces problèmes au point de vue astronomique avec plus de compétence que nous ne pourrions le faire. Au point de vue analytique, — que nous ne saurions même épuiser tant il offre d'aspects divers dans *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, — l'œuvre dont il s'agit est double: elle présente un côté positif et un côté négatif. Ce dernier, comme il résulte de ce qui vient d'être dit en dernier lieu, se dessina, lui aussi, dès les mémoires *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. Il était même apparu auparavant, car les résultats dont nous allons avoir à parler sur ce point ne sont que l'application de la note à laquelle nous avons fait allusion plus haut (p. 235).

Examinons donc comment, tant dans ces deux travaux que dans ceux qui les suivirent, Poincaré limite la portée des méthodes qui avaient été appliquées avant lui.

L'intégration, au sens élémentaire du mot, avait, depuis longtemps, été abandonnée. Pourait-on songer à faire des progrès dans ce sens, c'est-à-dire à chercher de nouvelles intégrales? Pour les équations de la Mécanique céleste, le nombre des intégrales connues est de dix. En peut-il, en général, exister d'autres exprimables par les moyens classiques de l'Analyse? Il était vraisemblable que non.

La preuve rigoureuse d'impossibilités de cette nature est une catégorie de questions dont la difficulté a, de tout temps, éveillé l'intérêt des géomètres vraiment supérieurs. La démonstration de l'incommensurabilité entre le côté d'un carré et sa diagonale, dans l'antiquité, celles de l'impossibilité de la quadrature du cercle et de la non-résolubilité des équations algébriques au delà du quatrième degré, dans les temps modernes, comptent à juste titre, parmi les plus belles conquêtes des mathématiques.

En ce qui concerne les intégrales des équations de la Mécanique céleste, une démonstration de l'espèce en question avait été partiellement fournie par Bruns; mais c'est à Poincaré qu'il fut donné de la compléter et d'établir en toute rigueur l'inexistence non seulement d'intégrales algébriques, mais plus généralement, d'intégrales *uniformes* autres que les intégrales classiques.

Le résultat ainsi obtenu n'intéresse pas moins l'analyste pur que l'astronome. Sa portée n'est pas limitée au système différentiel particulier qui fait l'objet de la mécanique céleste. La même méthode qui l'a fourni, permet de discuter le

nombre des intégrales uniformes des problèmes de la mécanique classique, et, lorsque ce nombre est insuffisant pour l'intégration, de trouver les seuls cas où il puisse s'accroître. Cette méthode est donc nécessairement à la base de toutes les recherches ultérieures sur ces sujets.

Elle ne doit pas moins attirer l'attention par les principes qu'elle fait intervenir. Elle a conduit POINCARÉ à étudier le développement de la fonction perturbatrice sous un jour nouveau, en en considérant, non plus seulement les premiers termes qu'ils ont pu former explicitement, mais au contraire les termes d'ordres très élevés. Dans cette étude, POINCARÉ utilise non seulement les résultats de la théorie des fonctions dus à ses prédécesseurs et particulièrement à M. DARBOUX, mais leur généralisation aux fonctions de plusieurs variables, telle que la lui ont fournie ses recherches sur les résidus et les périodes des intégrales doubles. La Théorie des fonctions est ainsi appliquée d'une façon toute nouvelle à celle des équations différentielles.

Ces recherches fournissent, entre les coefficients successifs du développement, une infinité de relations qui montrent que, considérés comme fonctions des éléments des orbites, ils se réduisent à un nombre fini de transcendantes.

Un nouveau chapitre de la Mécanique céleste a été ainsi ouvert et a donné lieu, depuis, aux travaux de plusieurs de nos jeunes géomètres et astronomes.

Mais l'impossibilité d'intégrer sous forme élémentaire se dégage également, à un autre point de vue, des résultats qualitatifs.

Dès l'équation du premier ordre, et à propos du cas le plus simple, celui de la sphère, nous avons vu que, par leur aspect même, les formes des courbes intégrales ne sont pas de celles qu'on aurait pu obtenir à l'aide des moyens classiques.

Des faits du même ordre se passent dans le cas général de la Mécanique céleste, dès que le nombre des corps en présence est supérieur à 2. L'existence même des solutions asymptotiques est déjà du nombre. Mais plus topique encore est l'exemple des solutions *doublement asymptotiques*, dont la mise en évidence a été l'une des grandes difficultés qu'ait surmontées POINCARÉ sur ce sujet.

Soit une solution périodique $L$ instable: elle admettra des solutions $L'$ asymptotiques pour $t = \infty$, et aussi des solutions $L''$ asymptotiques pour $t = -\infty$. Les premières engendreront une surface $S'$ passant par $L$, les secondes, une surface analogue $S''$.

Peut-il exister des solutions qui soient à la fois des courbes $L'$ et des courbes $L''$, c'est-à-dire qui après avoir été, pour $t = -\infty$, infiniment voisines de $L$, s'en écartent d'une quantité quelconque pour s'en rapprocher ensuite indéfiniment pour $t = +\infty$ ?

Cela revient à se demander si les surfaces $S'$ et $S''$ se coupent ailleurs que suivant $L$. Cette question est une des plus difficiles que Poincaré ait abordées. Ce sont les invariants intégraux qui, dans une hypothèse particulière (telle que les surfaces en question passent très près l'une de l'autre) lui ont permis d'y répondre. Eux seuls pouvaient évidemment remplir ce rôle, puisque (en l'absence d'intégrales connues) eux seuls renseignent sur ce que deviennent les trajectoires au bout de très longs intervalles de temps. Non seulement leur considération montre que les surfaces $S'$ et $S''$ se coupent, de sorte qu'il existe des solutions doublement asymptotiques, mais ces surfaces se coupent une infinité de fois, et la disposition des courbes d'intersection est extrêmement compliquée. En effet, sur une surface asymptotique quelconque, entre deux solutions doublement asymptotiques quelconques, il y en a une infinité d'autres.

On comprendra mieux encore ce que ce résultat a de singulier si l'on réfléchit que, au contraire, une surface $S'$ ou une surface $S''$ ne peut jamais se couper elle-même.

Avec Poincaré, substituons aux deux surfaces en question les courbes obtenues en coupant par un plan. «Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau».

«On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complexité du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme[1] . . . . .»

D'autres conséquences du même ordre découlent des mêmes prémisses.

Au lieu d'une seule solution doublement asymptotique à $L$, considérons en plusieurs, $L_1$, $L_2$, . . .: toutes ces courbes seront, pour $t = -\infty$ situées sur $S''$ et, pour $t = +\infty$, sur $S'$.

Mais il résulte des faits établis par Poincaré que l'ordre dans lequel elles se succèdent sur $S'$ est sans rapport avec celui dans lequel elles se succédaient sur $S''$. Si de deux solutions la première est plus voisine que la seconde de la solution périodique pour $t = -\infty$, il pourra arriver que pour $t = +\infty$, la première soit plus éloignée que la seconde de la solution périodique, mais il pourra arriver aussi que ce soit le contraire.

[1] *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 389.

«Cette remarque est encore de nature à nous faire comprendre toute la complication du problème des trois corps et combien les transcendantes qu'il faudrait imaginer pour le résoudre diffèrent de toutes celles que nous connaissons.»[1]

La voie de l'intégration proprement dite étant ainsi fermée, la Mécanique céleste procède par approximations successives. La tâche qui s'offre à Poincaré est de discuter la valeur des méthodes imaginées dans ce but.[2]

On savait que, grâce surtout aux petits diviseurs, la convergence de toutes ces méthodes est très douteuse. Il se trouve cependant, — Poincaré montrera par quel mécanisme — qu'elles suffisent, en général, aux calculs numériques usuels.

Mais ceux ci ne sont pas seuls en jeu. «Il ne s'agit pas seulement de calculer les éphémérides des astres, quelques années d'avance, pour les besoins de la navigation ou pour que les astronomes puissent retrouver les petites planètes déjà connues. Le but final de la Mécanique céleste est plus élevé: il s'agit de résoudre cette importante question: la loi de Newton peut-elle expliquer à elle toute seule tous les phénomènes astronomiques? Le seul moyen d'y parvenir est de faire des observations, aussi précises que possible, de les prolonger pendant de longues années ou même de longs siècles et de les comparer ensuite aux résultats du calcul. Il est donc inutile de demander au calcul plus de précision qu'aux observations, mais on ne doit point non plus lui en demander moins. Aussi l'approximation dont nous pouvons nous contenter aujourd'hui deviendra-t-elle un jour insuffisante.»[3]

Or, non seulement les séries classiques ne pouvaient nous assurer cette exactitude de plus en plus grande; mais, en raison de leur forme même, on ne pouvait leur demander de conduire à coup sûr à de bons résultats pour une période par trop longue.

A plus forte raison ne pouvaient-elle nous renseigner sur la question de *la stabilité*, laquelle fait intervenir l'indéfinie durée des siècles.

Aussi, au XIX[e] siècle, des développements en séries de forme nouvelle ont-ils été proposés pour exprimer les éléments des orbites planétaires.

---

[1] Loc. cit. p. 391.

[2] Leur nombre et la variété (au moins apparente) de leurs principes vient en quelque sorte, dans l'état actuel de la Science, ajouter un obstacle nouveau à toutes les difficultés qui entourent l'étude de la Mécanique céleste.

On doit à Poincaré d'avoir montré (voir en particulier t. 14, 15 du Bulletin Astronomique) comment on peut passer des unes aux autres en changeant le groupement des termes.

[3] Poincaré, *Revue Générale des Sciences*, tome II, 1891, p. 1—2.

Ils ont pour but de diriger le calcul de manière à ne jamais introduire que des termes périodiques.

Une première difficulté de la question (celle qui provient des termes «séculaires»), est ainsi évitée. Mais celle des petits diviseurs subsiste; et, par conséquent une question préjudicielle se pose: les séries ainsi obtenues — celles de Lindstedt, par exemple, — convergent-elles?

Jusqu'à Poincaré, il paraissait de toute évidence qu'une réponse à cette question, dans le sens de l'affirmative, démontrait la stabilité. On était même tenté de présumer celle-ci par l'existence seule de séries telles que celles de Lindstedt.

En d'autres termes, si, grâce aux «petits diviseurs», les développements en séries formés pour rendre compte des mouvements des corps célestes sont divergents, on était porté à admettre qu'ils peuvent cependant fournir sur certaines propriétés des solutions — particulièrement sur les propriétés qualitatives — les indications qu'on se serait cru autorisé à en déduire en toute rigueur en cas de convergence.

Poincaré va décider ces questions en sens tout contraire. Non seulement les séries de Lindstedt sont, en général, divergentes; mais il y a plus — et cette paradoxale découverte, qui a bouleversé les conceptions des astronomes, remonte aux premières années de son labeur —, la convergence même de séries de cette nature ne permettrait pas, à elle seule, d'affirmer la conclusion demandée, celle à laquelle on serait conduit en se fiant au calcul formel.

Poincaré montrera par des exemples que cette conclusion peut être fausse. Cette démonstration est donnée sur le cas du second ordre, où les représentations géométriques sont plus simples. Ici, toutefois, ce ne sont pas elles qui jouent le rôle important, et le point de vue purement analytique reprend ses droits.

Une Note, contemporaine, nous l'avons dit, des premiers travaux de Poincaré, contient les principes essentiels de la solution. Les développements habituellement considérés en Mécanique céleste sont, on le sait, des séries trigonométriques

$$\Sigma[A_n \cos(\alpha_n t) + A'_n \sin(\alpha_n t)]$$

mais bien différentes des séries de Fourier en ce que les arguments des sinus et cosinus s'obtiennent en multipliant la variable indépendante (autrement dit, le temps) par des coefficients $\alpha_n$ qui ne croissent pas nécessairement à l'infini et qui peuvent même tendre vers zéro.

C'est la théorie mathématique de ces séries qui a été fondée par Poincaré en quelques pages des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, puis du *Bulletin*

*Astronomique*. Les résultats en offrent, pour le moins, autant de singularités que ceux qui sont relatifs aux séries de Fourier; mais certaines propriétés essentielles de ces dernières trouvent, moyennant modification convenable, leur généralisation. La plus importante est l'expression des coefficients $A_n$, $A'_n$ par des intégrales définies: seulement celles-ci, étant donnée que les séries dont il s'agit ne sont plus périodiques, doivent être étendues, non plus à un intervalle fixe, mais à un intervalle indéfiniment croissant.

C'est cette expression qui permet à Poincaré de mettre en évidence d'une manière irréfutable l'erreur que l'on commet en voyant dans la convergence d'une série trigonométrique de cette espèce pour toutes les valeurs de la variables une preuve du fait que la somme de cette série reste finie même lorsque cette variable augmente indéfiniment. L'expression en question montre en effet que la somme de la série ne peut rester finie si les coefficients $A$, $A'$ eux-mêmes ne sont pas tous inférieurs en valeur absolue à une même limite fixe.

Or l'hypothèse que les coefficients $A$, ou certains d'entre eux, aillent en augmentant indéfiniment n'est nullement incompatible avec la convergence de la série, du moment que les coefficients $\alpha$ correspondants peuvent tendre vers zéro. Il en est ainsi même dans le cas de la convergence absolue, celui où surtout on pouvait être porté à croire le contraire, par analogie avec les autres types de séries connus.

A cet égard, les deux séries partielles formées, l'une par les termes cosinus, l'autre par les termes sinus, se comportent très différemment. La première

$$\Sigma A_n \cos(\alpha_n t)$$

ne saurait évidemment converger absolument pour $t = 0$ sans converger *uniformément* pour toutes les valeurs réelles de $t$ (la série des coefficients $A$ étant absolument convergente) et représenter une fonction bornée.

Il en est autrement pour la série partielle des sinus

$$\Sigma A'_n \sin(\alpha_n t).$$

Tout ce qu'on en peut dire, c'est que, si elle converge absolument dans un intervalle, si petit qu'il soit, autour de l'origine elle est absolument convergente pour toute valeur réelle de $t$: — théorème qui s'étend dès lors aisément à la série totale et au cas où l'intervalle où la convergence est donnée ne comprend pas l'origine —; mais cette convergence, si elle est absolue, n'est pas nécessairement uniforme et des exemples tels que celui de la série $\Sigma\, 2^n \sin\left(\frac{t}{3^n}\right)$ montrent qu'elle peut avoir lieu avec des coefficients indéfiniment croissants.

Les principes ainsi établis ne servent pas seulement à discuter les questions de stabilité dont nous parlons en ce moment. Combinés avec ceux que Poincaré indique d'un mot à une autre occasion,[1] ils ont donné naissance à toute la théorie des fonctions quasi-périodiques que l'on doit à MM. Bohl et Esclangon et qui est destinée à prendre une place importante en Mécanique céleste.

Si maintenant on applique ces principes aux trajectoires $L$, $L'$ considérées plus haut, et aux séries correspondantes qui, nous l'avons dit, ne sont autre chose que des séries de Lindstedt, on voit que non seulement ces développements en séries ne suffisent pas à démontrer l'existence des surfaces tubulaires, mais qu'en fait ces surfaces en question n'existent pas toujours et que plusieurs dispositions très différentes, tant stables qu'instables, sont possibles.

On voit alors «à quel point les difficultés que l'on rencontre en mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie».

Ajoutons que si l'on passe au problème des $n$ corps lui-même, la divergence des séries de Lindstedt, du moins en général, — car la convergence reste encore, à la rigueur, possible quoique très improbable, pour des valeurs particulières des constantes d'intégration — ressortira, elle aussi, des propriétés des solutions et, en particulier, de celles des exposants caractéristiques.

Sur cette question, d'ailleurs, les conclusions de Poincaré ne furent pas purement négatives. S'il constate la divergence des séries en question, c'est lui qui a montré — à l'aide de principes déjà acquis par ses recherches sur les intégrales irrégulières des équations linéaires et qui ont reçu une portée nouvelle par les travaux ultérieurs de M. Borel — pourquoi elles peuvent être néanmoins utiles et dans quelles conditions on pouvait en faire un usage légitime: pourquoi, autrement dit, tout en étant incapables de fournir une approximation indéfinie, même si on les poursuivait indéfiniment, elles permettent néanmoins, les masses perturbatrices étant petites, de pousser cette approximation jusqu'à un certain point, heureusement suffisant en pratique.

En même temps que Poincaré est amené à faire les réserves que nous venons d'indiquer sur la puissance des principaux moyens d'action employés avant lui, nous avons déjà vu qu'il en apporte, à son tour, de nouveaux.

[1] Bull. Astr. t. XIV.

Les invariants intégraux viennent rendre des services sinon égaux, du moins analogues à ceux qu'auraient pu fournir ces intégrales uniformes à la poursuite desquelles la mécanique céleste doit renoncer. Comme elles, ils représentent des quantités qui restent constantes pendant tout le cours du mouvement, seule propriété qui permette d'établir des relations directes entre des phases éloignées de celui-ci.

Quant aux solutions périodiques et aux solutions asymptotiques qui en dérivent, nous avons dit qu'elles servent, non seulement en elles-mêmes, mais comme intermédiaires permettant d'arriver aux autres solutions.

C'est sous ce jour que les solutions périodiques apparaissent déjà dans les recherches dont nous avons précédemment parlé. Mais leur puissance, à cet égard, va surtout se manifester avec les méthodes même par lesquelles Poincaré démontre leur existence.

Nul sujet n'a retenu davantage son attention. On peut dire qu'il s'en est préoccupé toute sa vie. Le premier travail qu'il y consacra date, en effet, de 1883; et l'ombre de la mort planait déjà sur lui lorsqu'il écrivit le dernier,[1] en l'ouvrant par les nobles et mélancoliques paroles, véritable testament scientifique, que nul d'entre nous n'a oubliées.

Pour la formation des solutions périodiques, le Mémoire de 1883 emploie le théorème de Kronecker. Celui-ci se présente, en l'espèce, comme la généralisation naturelle au cas des systèmes d'équations à plusieurs inconnues (problème auquel peut se ramener en dernière analyse la détermination des solutions périodiques dont il s'agit) de la méthode la plus élémentaire qui existe pour déceler les racines d'une équation unique, celle qui est fondée sur les changements de signe du premier membre.

Une autre méthode classique qui permet évidemment, elle aussi, de montrer l'existence des solutions des systèmes d'équations peut être considérée comme une généralisation du théorème de Rolle: elle consiste à utiliser l'existence du maximum ou du minimum d'une fonction convenablement choisie des inconnues. On aura ainsi assurément une solution des équations obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles de cette fonction. Poincaré ne l'emploie pas seulement sous cette forme, mais sous celle, sur laquelle nous reviendrons plus loin, du calcul des Variations.

Ces différents procédés sont combinés entre eux, et surtout, comme nous allons le voir, avec les résultats que donne la théorie des fonctions implicites, en

[1] Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXIII (1er semestre 1912) pp. 375—407.

vue de l'étude plus particulière du problème des trois corps et des équations de la Mécanique céleste.

Au point de vue analytique, le système planétaire se présente comme un système dynamique dépendant d'un paramètre $\mu$ (masse perturbatrice ou facteur proportionnel aux masses pertubatrices) auquel on ne donne que de très petites valeurs. Pour $\mu = o$, l'intégrale générale est connue: tous les points matériels qui composent le système décrivent des ellipses suivant la loi de Kepler.

Lorsqu'un système d'équations (en termes finis) à un nombre égal d'inconnues dépend d'un paramètre et que son jacobien n'est pas nul, le théorème classique relatif aux fonctions implicites montre l'existence d'une solution pour les petites valeurs de ce paramètre dès que la solution existe pour la valeur zéro.

Poincaré a parfois l'occasion d'appliquer ce principe sous la forme que nous venons de rappeler; — et le théorème précédemment cité (page 242) sur la dépendance des intégrales des équations différentielles par rapport aux données initiales et aux paramètres lui permet même d'affirmer l'analyticité des solutions. Mais, en général, dans le type de problèmes qu'il traite, les choses se passent de manière un peu plus compliquée. Les équations relatives à $\mu = o$, c'est-à-dire celles qu'on obtient quand on ne tient pas compte des perturbations, admettent une infinité de solutions périodiques, à savoir toutes celles dans lesquelles les moyens mouvements sont tous commensurables entre eux. Mais c'est précisément cette infinité, — d'une manière plus précise, l'infinité continue de solutions qui correspondent à un seul et même système de valeurs des moyens mouvements — qui fait ici la difficulté: car elle entraîne cette conséquence que le jacobien est nul.

Le théorème classique ne suffit donc plus, et une étude plus approfondie des fonctions implicites dont il s'agit doit être entreprise. Géométriquement parlant, si, aux coordonnées initiales qui définissent la solution cherchée, on joint la valeur de $\mu$ pour définir ainsi un point de l'hyperespace, les équations qui expriment que la solution est périodique définissent, dans cet hyperespace, une variété dont certaines parties continues sont situées sur le domaine $\mu = o$. On ne pourra avoir une série continue de solutions de ces équations correspondant à $\mu$ variable et dépendant analytiquement de $\mu$ que lorsque l'on aura une courbe de l'hyperespace appartenant à la variété en question et coupant le domaine $\mu = o$, d'où résultera un *point multiple* de cette variété.

Poincaré, en usant des deux moyens d'actions indiqués plus haut et en reliant entre eux par des lemmes remarquables qui permettent d'établir l'existence de fonctions implicites dans des cas étendus où le jacobien est nul, établit l'existence de tels points multiples: à partir de l'un d'entre eux, la méthode

classique devient applicable moyennant des modifications convenables et fournit une série de mouvements périodiques dont les éléments représentatifs sont développables suivant les puissances entières ou fractionnaires de $\mu$.

Mais la méthode devait devenir plus souple et plus générale, grâce aux recherches que POINCARÉ développait vers le même temps (1889) sur la figure des planètes et dont il sera question plus loin. Là, on a à résoudre, et dans des conditions beaucoup plus difficiles encore, puisqu'il s'agit d'une infinité de variables, des questions de même nature. Les principales notions qu'il va introduire à cette occasion, celles de *forme de bifurcation* et de *coefficients de stabilité*, trouvent ici leurs analogues. Les formes de bifurcation correspondent aux points doubles de notre variété et, constituent par conséquent les éléments essentiels qui permettent de la construire; les coefficients de stabilité ne sont ici autres que les carrés des exposants caractéristiques, effectivement liés à la stabilité (à la LIAPOUNOF) d'une solution périodique quelconque.

Comme dans la théorie de la figure des planètes, il y a une sorte d'échange des stabilités chaque fois qu'on passe par une forme de bifurcation. Un fait du même ordre se produit d'ailleurs dans le cas qui s'oppose à un certain point de vue à celui de la bifurcation, celui où, au cours de la variation de $\mu$, il y a disparition de solutions périodiques. Cette disparition se fait par couples comme celle des racines réelles des équations algébriques et les solutions qui disparaissent ensemble sont de stabilités différentes.

Mais, sur un arc de courbe tracé dans notre hyperespace et le long duquel $\mu$ varie constamment dans le même sens, le théorème de l'échange des stabilités admet au contraire une réciproque: il ne peut y avoir changement dans les stabilités autrement qu'en passant par les bifurcations. On a ainsi un nouveau moyen efficace de mettre en évidence celles-ci et un nouvel exemple des services que peut rendre l'introduction des exposants caractéristiques.

Ainsi élargie, la méthode se généralise d'elle même et suffit à faire apparaître des résultats d'une complication inattendue, lorsqu'on passe à ce que POINCARÉ appelle les solutions périodiques du *second genre*.

Il donne ce nom à celles qui sont voisines d'une solution périodique déterminée de période $T$ et qui sont également périodiques, mais dont la périodicité ne se retrouve qu'après $k$ révolutions, de sorte que leur période est voisine non de $T$, mais de $kT$. Leurs points représentatifs, dans notre hyperespace, engendreront une variété analogue à la précédente, laquelle en fera d'ailleurs évidemment partie. Mais il y aura en outre, des branches nouvelles et, par conséquent, des points multiples nouveaux, intersections de ces branches nouvelles avec les

anciennes; et nous trouverons ainsi de nouvelles séries de solutions périodiques, greffées, en quelque sorte, sur les premières.

L'emploi des exposants caractéristiques montre bien, en effet, la condition qui caractérise les nouveaux points doubles comme plus large que celle qui caractérisait les anciens.

Reste, il est vrai, à s'assurer, même lorsque cette condition est remplie, si les nouvelles branches de courbes dont elle fait prévoir l'existence sont réelles. Ce sont les invariants intégraux qui permettent de triompher de cette difficulté en la ramenant à l'étude des maxima et minima d'une certaine fonction, étroitement liée d'ailleurs au principe de la moindre action. Un lemme (analogue à ceux dont nous avons parlé à la fin de la page 264 ainsi qu'à ceux dont il sera question à propos de la figure des planètes), qui constitue en lui même un progrès essentiel pour l'étude des fonctions implicites, fournit le moyen de constater que la condition précédemment écrite est bien suffisante.

Or, cette condition est que l'un des exposants caractéristiques soit un multiple de $\frac{2i\pi}{kT}$.

Comme $k$ est un entier quelconque, on peut le prendre assez grand pour que les multiples de $\frac{2i\pi}{kT}$ soient aussi rapprochés les uns des autres que l'on veut. Comme ces exposants caractéristiques varient continûment avec $\mu$, les bifurcations dont il s'agit se produiront dès lors à intervalles aussi petits qu'on le voudra, au cours de la variation de ce paramètre. Ce ne sont donc plus un certain nombre de familles de solutions périodiques qui sont ainsi mises en évidence, mais un réseau extrêmement compliqué de familles de cette espèce, distribuées comme le sont les nombres commensurables dans la suite totale des nombres. Les périodes correspondantes seront, par contre, indéfiniment croissantes, puisque ce seront des multiples plus ou moins éloignés de la période primitive $T$.

Il est aisé de comprendre qu'un tel résultat éclaire d'un jour nouveau les précédents et ouvre de nouvelles perspectives.

Nous avons vu Poincaré rattacher aux solutions périodiques toutes celles qui en sont suffisamment voisines. Etant donnée la manière dont les solutions périodiques dépendent des nombres commensurables, ne peut-on atteindre, par cette voie, toutes les solutions possibles (du moins toutes les solutions stables), de même que, à l'aide des nombres commensurables, on peut représenter par approximation tous les nombres réels?

On aurait ainsi une voie conduisant en un sens à l'intégration complète

du problème. Les choses se passent d'ailleurs effectivement de cette façon pour certains problèmes de Dynamique.[1]

Un récent travail, auquel la question ainsi soulevée a conduit M. Birkhoff, est venu modifier nos idées sur ce point. Mais, en nous amenant à élargir le principe précédent, il ne tend pas, loin de là, à en affaiblir la portée. M. Birkhoff, en effet, arrive à établir la possibilité d'une approximation indéfinie, analogue à celle qu'avait en vue Poincaré, en remplaçant, toutefois, les solutions périodiques par une autre catégorie de solutions un peu plus générale.

Il semblerait, à un examen superficiel, que nous ayons ainsi épuisé toutes les solutions périodiques du problème de la Mécanique céleste correspondant aux valeurs suffisamment petites de $\mu$, ou du moins toutes celles qui forment des séries continues. Nous savons, en effet, que toute série de cette espèce doit, à la limite, pour $\mu = 0$, donner une solution périodique du problème primitif, qui est celui où on ne tient pas compte des perturbations. Or il semble que nous ayons passé en revue toutes les solutions périodiques de ce problème primitif, et qu'il suffise, par conséquent, de chercher celles qui sont voisines de celles là pour $\mu$ voisin de zéro.

Mais nous avons déjà vu, avec Poincaré, les difficultés d'un genre tout particulier que l'on rencontre lorsque, dans les questions vraiment ardues et vraiment mystérieuses comme celles auxquelles il s'attaque, on cherche à préjuger de la solution par l'étude des cas particuliers que l'on sait traiter. La simplification s'achète par une déformation où il peut arriver que tous les phénomènes deviennent méconnaissables. Nous sommes bien obligés d'accepter le marché (le cas des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre est le seul où Poincaré ait pu opérer autrement) du moment que, en dehors de lui, nous serions condamnés à l'impuissance absolue; mais nous devons compter avec les pièges auxquels il nous expose. Nulle lecture n'est plus instructive à cet égard que celle des derniers paragraphes du *Mémoire sur le problème des trois corps*, ou du Chapitre correspondant des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.[2]

Une chose rend suspecte, ici, la conclusion provisoire à laquelle nous songions tout à l'heure. Parmi les paramètres dont dépend l'état du système, un certain nombre (les anomalies des planètes sur leurs orbites osculatrices, ou les longitudes des périhélies ou des nœuds de ces orbites) sont angulaires: il ne serait dès lors pas nécessaire, pour la périodicité, que ces paramètres reviennent à leurs valeurs primitives au bout de la période $T$; il suffit que chacun d'eux (ou plutôt

[1] Par exemples pour les géodésiques des surfaces à courbure négative.

[2] Tome III, Ch. XXXII.

chacune de leurs différences mutuelles) ait alors augmenté de $2p\pi$, $p$ étant un entier quelconque. Or, en ce qui concerne certains d'entre eux (les longitudes mentionnées en dernier lieu), cet entier $p$ a toujours la valeur zéro lorsqu'il s'agit du mouvement Keplérien sans perturbation. Il en est forcément de même sur toutes les solution périodiques dont l'existence a été jusque là établie pour $\mu$ voisin de zéro, puisque $p$ ne peut, sans discontinuité, passer de zéro à une valeur entière non nulle.

Cependant, l'absence, pour $\mu$ différent de zéro, de solutions périodiques dans lesquelles les entiers $p$ soient quelconques, nous apparaît, non seulement comme très peu probable, mais même comme tout à fait absurde lorsqu'on tient compte de ce que l'annulation des entiers $p$ est une conséquence des propriétés toutes particulières du problème envisagé et n'aurait plus lieu si on le remplaçait par un autre problème de Dynamique infiniment voisin.

Il faut donc qu'il existe d'autres systèmes de solutions périodiques dégénérant, pour $\mu = 0$, en courbes limites autres que celles dont nous avons parlé jusqu'ici. C'est en effet ce qui a lieu. Poincaré en indique la raison, pour la première fois, dans la conclusion du *Mémoire sur le problème des trois corps.*

»Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et «qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, *à moins d'être à «une distance infiniment petite l'une de l'autre.* Mais si ces planètes passent infini- «ment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme «si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle «façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions «discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouve- «ment Képlerien et que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.»

Autour de ces courbes, composées chacune de plusieurs ellipses Képleriennes et présentant des points anguleux, se groupent les nouvelles solutions périodiques, dites *de deuxième espèce,* que Poincaré examine d'ailleurs sommairement, dans *les Méthodes nouvelles,* en raison de leur peu d'analogie avec les orbites observées, mais qui, comme on le voit, n'en sont pas moins d'un haut intérêt analytique.

Poincaré reprend la recherche des solutions périodiques sous une autre forme, dix ans plus tard, dans un Mémoire des *Transactions* de la Société mathématique américaine. Nous dirons plus loin comment il lui applique les données du Calcul des Variations.

C'est à ce même problème enfin, et sous sa forme la plus difficile, qu'est allée l'une des dernières méditations de sa vie, ce Mémoire des *Rendiconti del*

*Circolo Mat. di Palermo* qui a douloureusement ému tous ses admirateurs par le triste pressentiment qui s'y trouve exprimé.

Poincaré y cherche à ne plus se borner, comme il l'avait fait dans *les Méthodes nouvelles,* aux petites valeurs de $\mu$, c'est-à-dire à obtenir des solutions périodiques même si l'on n'est pas au voisinage d'un cas d'intégration connu.

Par une méthode de forme toute nouvelle, il montre que tout se ramène à un théorème de géométrie relatif aux transformations des figures planes (existence d'un point invariant sous des conditions très-générales imposée à la transformation) et que, par conséquent, la démonstration de ce théorème équivaudrait à la résolution de la question posée, au moins dans le premier cas que l'on soit conduit à aborder.

Cette démonstration, que Poincaré s'excusait de ne pouvoir fournir, fut donnée, peu de mois après sa mort, par M. Birkhoff, de sorte que les résultats qu'il énonçait à titre hypothétique sont définitivement acquis aujourd'hui.

Invariants intégraux, solutions périodiques, solutions asymptotiques, sont les matériaux dont sont tissées *les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* C'est par leur réaction mutuelle que sont obtenues les conquêtes qui ont fait l'admiration des géomètres et des astronomes.

Non seulement les notions ainsi créées sont grosses pour la Mécanique céleste de résultats nouveaux, mais elles constituent, pour les résultats obtenus par ailleurs, un important moyen de contrôle. Les invariants intégraux, par exemple, donnent une série de vérifications pour tous les calculs entrepris par les méthodes connues.[1]

Les propriétés des solutions périodiques ont, à cet égard, fait leurs preuves d'une manière remarquable à l'occasion des mémorables travaux de G. Darwin.[2] Les calculs du grand astronome anglais ont, on le sait, dans un exemple numérique déterminé, abouti à la formation d'une série d'orbites périodiques de formes entièrement nouvelles et souvent inattendues. Ces orbites sont de plusieurs catégories différentes; elles sont tantôt stables et tantôt instables. Certaines des transformations qu'elles subissent, lorsque la constante de Jacobi varie continûment, obéissaient bien aux lois établies par Poincaré. En particulier, on voyait à un certain moment apparaître simultanément deux d'entre elles, l'une stable et l'autre instable, et cependant très peu différentes l'une de l'autre lors de leur apparition.

[1] Les invariants intégraux possèdent d'ailleurs d'importantes propriétés formelles; S. Lie et depuis, MM. Koenigs et Goursat leur ont consacré leurs efforts. On sait qu'on doit à M. de Donder plusieurs exposés de leurs propriétés.

[2] Acta, tome XXI.

Au contraire, une des familles d'orbites périodiques trouvées passait de la stabilité à l'instabilité dans des conditions où ce passage n'aurait pu se faire que moyennant échange de stabilités et, par conséquent, bifurcation. Celle ci n'apparaissant pas en l'espèce, POINCARÉ fut conduit à présumer que les orbites instables n'étaient pas la continuation des orbites stables.

C'est ce qu'a confirmé ultérieurement, dans ce journal même,[1] M. HOUGH, en reprenant l'étude des transformations mutuelles des orbites précédentes. On retrouve, dans cet exemple, les phénomènes généraux décrits dans les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

En particulier, serrant les calculs de plus près au voisinage du passage mis en doute par POINCARÉ, M. HOUGH constate que, effectivement, les apparences constatées par DARWIN sont dues à ce que, en vertu des données numériques adoptées, l'apparition d'une famille de satellites coïncide approximativement avec la disparition de l'autre.

Ce sont les invariants intégraux qui ont permis à POINCARÉ de s'attaquer au problème de la stabilité des trajectoires, qui correspond, pour un système dynamique quelconque, a celui de la stabilité du système solaire.[2]

LAPLACE a, on le sait, démontré cette dernière stabilité en première approximation et POISSON a passé à l'approximation du second ordre. Mais nous savons maintenant que les méthodes d'approximation ne peuvent donner ici de réponse valable: on peut seulement en inférer une certaines stabilité temporaire, nous renseignant pour une très longue période.

C'est la stabilité au sens de POISSON (moins précis que celui de LAPLACE) que dans une catégorie étendue de mouvements (laquelle toutefois n'embrasse pas notre système solaire) POINCARÉ a pu démontrer d'une manière rigoureuse et non plus approximative.

Par contre, son résultat a une signification toute différente de ceux qui avaient été obtenus antérieurement. Il ne gouverne pas toutes les trajectoires sans exception, mais seulement à *des trajectoires exceptionnelles près*.

Les mots «trajectoires exceptionnelles» doivent s'interpréter, ici, à l'aide du Calcul des probabilités: ils veulent dire que, une trajectoire étant prise au hasard,

[1] Acta, tome XXIV, p. 257—288.

[2] Encore ne s'agit-il ici que de la question prise au point de vue théorique. POINCARÉ a soin de rappeler (Annuaire du Bureau des des Longitudes, 1898) que le problème analytique ainsi posé est tout différent du problème physique, l'influence des éléments négligés (les marées, entre autres, et le frottement qu'elles produisent) ne pouvant manquer de devenir, en fin de compte, prépondérante.

la probabilité pour qu'elle soit une de celles qui mettent en défaut le théorème est *infiniment petite* (et non pas seulement très petite).

Autrement dit, il n'est pas absolument certain qu'une trajectoire arbitraire possède la stabilité à la Poisson, mais il y a infiniment peu de chances qu'il en soit autrement.

* * *

Le *Calcul des Probabilités*, auquel Poincaré était une première fois amené par la Dynamique, devait, par la suite, tenir une place importante dans son œuvre.

En même temps qu'il s'occupait d'en élucider les principes, il est un de ceux qui en ont poussé le plus loin l'application. Nous aurions à insister sur ces deux aspects de son oeuvre si, à quelques exceptions près, le premier d'entre eux ne concernait le philosophe et le second le physicien.

C'est le développement des théories moléculaires qui a imprimé au génie de Poincaré cette dernière orientation. Au point de vue du mathématicien, les théories en question ont eu pour effet: 1° de faire passer au second plan les équations aux dérivées partielles, au profit des équations différentielles ordinaires; 2° de faire reposer toutes les déductions sur le Calcul des probabilités.

De là, et du rôle directeur que Poincaré sut prendre dans ce grand mouvement, découlent, par une conséquence nécessaire, les recherches qu'il eut à entreprendre dans cette dernière direction, recherches qu'il ne nous appartient pas de retracer dans leur ensemble.

Contentons nous d'en rappeler l'aspect proprement mathématique, tel qu'il est traité dans la deuxième édition des *Leçons sur le Calcul des Probabilités* professées à la Faculté des Sciences de Paris.

Tout cet ouvrage renferme des aperçus qu'il conviendrait de signaler: — telle est, par exemple, l'application nouvelle de la méthode des moindres carrés à l'interpolation, si adéquate, comme l'a montré M. Quiquet,[1] aux besoins de la pratique par la manière dont les calculs faits en vue de l'approximation par un polynôme de degré déterminé peuvent être utilisés pour former le polynôme d'approximation de degré supérieur. Mais la question fondamentale au point de vue de l'application du calcul des probabilités aux phénomènes moléculaires fait l'objet du dernier chapitre. C'est déjà elle qui est abordée lorsque Poincaré étudie le battage des cartes.

Pourquoi, lorsque le jeu a été battu assez longtemps, admettons-nous que toutes les permutations des cartes, c'est-à-dire tous les ordres dans lesquels ces cartes peuvent être rangées, doivent être également probables? Le joueur qui

[1] Congrès de Cambridge, 1912, t. II, p. 385.

bat les cartes a cependant des habitudes instinctives et, grâce à elles, si l'ordre primitif des cartes est donné, on doit supposer que, pour l'ordre obtenu après un seul battage, certaines permutations sont plus probables que d'autres. Poincaré va montrer en toute rigueur que, si le nombre des battages est grand, le résultat obtenu sera totalement indépendant de ces habitudes inconnues du joueur, toutes les permutations ayant finalement la même probabilité.

La question qui se pose à la base des théories cinétiques est tout analogue, mais avec des difficultés nouvelles; car l'énoncé comporte, cette fois, des cas d'exception. Il doit, tout d'abord, subir une modification chaque fois que les équations différentielles du problème admettent des intégrales. Mais cette réserve n'est pas la seule à laquelle soit conduit Poincaré, au moins théoriquement; et quoique, physiquement parlant, la conclusion visée (à savoir que, une fois connues toutes les intégrales univoques, la probabilité de chaque état final du système peut être connue *a priori*, indépendamment du mécanisme de mélange) reste vraisemblable, on voit que les conditions de sa validité mathématique sont à préciser.

Les nouveaux aspects que prenait ainsi la théorie physique ont mis une fois de plus en évidence, en en faisant sentir tout le prix, cette universalité, cette maîtrise simultanée des domaines les plus divers, qui est une des caractéristiques du génie de Poincaré.

La substitution des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles tendait évidemment à rapprocher les méthodes de la Physique mathématique des précédentes, de celles de la Mécanique céleste. Mais, grâce aux recherches ci-dessus mentionnées de Poincaré, on voit que l'introduction du Calcul des probabilités se trouvait agir dans le même sens. C'est, notons-le, sous la même forme que le Calcul des probabilités intervenait de part et d'autre: nous avons vu précédemment que le principe fondamental, à savoir l'existence de l'invariant intégral le plus usuel, est commun aux théories moléculaires et à la Dynamique de Poincaré.

Ce rapprochement entre les méthodes se retrouve d'une manière remarquable dans les résultats. Un astrologue aurait sans doute trouvé une preuve de l'identité du microcosme et du mégacosme dans cette similitude constatée entre l'étude de molécules dont il entre des millions de millions dans un millimètre cube et celle d'astres séparés par des distances que la lumière met des milliers d'années à franchir, celles-là étant considérées pendant quelques milliardièmes de seconde et ceux-ci pendant des millions de siècles.

Ce sont, tout d'abord, nos connaissances sur le mouvement des planètes qui nous ont aidés à comprendre la vie des molécules.

Mais l'inverse s'est produit lorsque, d'un unique système planétaire tel que le nôtre, on a voulu passer à la foule de ceux qui composent le monde stellaire, même limité à notre voie lactée. C'est Lord Kelvin qui émit pour la première fois une idée de ce genre; mais c'est Poincaré qui montra tout ce qu'elle est capable de donner. Il suffit de parcourir son livre sur les Hypothèses Cosmogoniques pour voir combien de relations nous commençons à pénétrer, qui nous resteraient encore incompréhensibles si nous n'avions à notre disposition les études statistiques entreprises par les physiciens sur le perpétuel et inextricable grouillement des molécules.

Ce livre fut un des derniers de son existence. Il était digne d'en marquer le couronnement.

Nul ouvrage pour lequel il fût plus nécessaire. Pour éclairer les propriétés des molécules par celles des nébuleuses et inversement, il fallait dominer à la fois les unes et les autres. Il fallait un successeur de Laplace qui fût en même temps un successeur des Clausius et des Boltzmann, pour écrire les *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*.

### 4. Analysis situs. Calcul des Variations. Déterminants infinis.

D'autres parties de l'oeuvre de Poincaré se rattachent encore à ses travaux sur les équations différentielles.

Ceux ci devaient, tout d'abord, l'amener logiquement à perfectionner la *Géométrie de situation*. Nous l'avons vu montrer qu'on ne saurait faire des progrès importants dans la théorie qualitative des équations différentielles sans rencontrer sur son chemin cette doctrine.

Pour les lignes et les surfaces de l'espace ordinaire, l'Analysis situs, du moins dans les conditions où les applications l'introduisent, tient tout entière dans les données utilisées par Riemann. Mais dès que l'on augmente le nombre des dimensions, les résultats se compliquent énormément, pendant qu'il devient impossible de les atteindre par l'intuition directe.

Poincaré se trouvait donc amené à traiter la géométrie de situation dans les espaces à plusieurs dimensions.

Il en est, en un sens, le premier fondateur, non qu'il ait été le premier à l'avoir abordée; mais seul, il a indiqué exactement les éléments qu'on doit se donner pour définir, à cet égard, une figure: ces éléments avaient été énumérés incomplètement avant lui.

Une première solution avait été fournie que l'on pouvait croire, au premier abord suffisante.

Betti avait généralisé à un nombre quelconque $n$ de dimensions la notion d'ordre de connexion: il avait défini $n-1$ nombres jouant visiblement un rôle tout analogue à celui de l'ordre en question. De même qu'une surface est complètement définie, au point de vue de l'Analysis situs, par son ordre de connexion, (lorsqu'on donne, en outre, le nombre de ses frontières), on admettait implicitement qu'une multiplicité quelconque était suffisamment caractérisée, au même point de vue, par ses nombres de Betti.

Pour fonder véritablement l'Analysis situs à plusieurs dimensions, Poincaré eut à corriger cette erreur. Il montra que, au point de vue dont il s'agit, la définition précise et complète d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions exige la connaissance d'un certain groupe de substitutions que l'on peut en déduire. Ce groupe, — et, par conséquent, les propriétés topologiques de la multiplicité — peuvent être altérées dans certains cas où, cependant, les nombres de Betti conservent tous leurs valeurs.

Une loi remarquable fut énoncée par Poincaré sur ces nombres de Betti. A la suite d'une pénétrante critique de M. Heegaard, elle l'amena à constater que la définition de ces nombres peut être précisée de plusieurs façons différentes et que l'une de ces modifications s'impose, au point de vue de l'exactitude de la loi en question.

D'autres nombres que ceux de Betti furent découverts dans la suite de ces recherches et jouent également un rôle important en l'espèce: ce sont les *coefficients de torsion,* liés aux variétés à un seul côté que l'on peut tracer sur la variété donnée. Mais un exemple montre que, pour caractériser celle-ci, la connaissance simultanée des nombres de Betti et des coefficients de torsion est encore insuffisante.

La nouvelle Analysis situs ainsi fondée devait également, comme celle de Riemann, conduire à des applications algébriques.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables venait, en effet, d'être fondée par les travaux de M. Picard. L'analogue de la surface de Riemann est, dans cette théorie, un domaine à quatre dimensions dont il est nécessaire d'étudier la connexion. C'est une étude que M. Picard avait déjà commencée. Poincaré y appliqua les données nouvelles dont il disposait.

Il faut dès lors définir et étudier, sur les surfaces algébriques, des *périodes d'intégrales doubles,* notion qui n'est pas sans relation avec celle des résidus des intégrales doubles considérées plus haut, mais qui est à celle ci ce que les périodes cycliques des intégrales abéliennes classiques sont aux périodes polaires, et

qui devaient jouer un rôle important dans les résultats qu'il obtint ensuite sur le développement de la fonction perturbatrice en Mécanique céleste.

Nous nous bornerons à ces indications en ce qui concerne les fonctions algébriques de deux variables. Il faudrait, si nous voulions insister et montrer quelle aide Poincaré a pu apporter à l'effort des Picard, des Castelnuovo, des Enriques, des Severi, retracer, plus longuement que nous ne saurions le faire ici, les principes de cette théorie et l'important développement qu'elle a pris dans ces dernières années.

Nous avons aussi constaté les relations de l'oeuvre dynamique et astronomique de Poincaré avec le *Calcul des Variations.*

Tous les travaux de Poincaré sur les équations differentielles, toutes les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* — et aussi toutes les recherches de Poincaré sur la figure des planètes — sont comme le remarque M. Hilbert, [1] du Calcul des variations, si l'on prend ce mot au sens le plus large: l'étude des relations d'une fonction avec les fonctions voisines.

Quant au Calcul des variations proprement dit, il a été également, nous l'avons dit, essentiel à la recherche des solutions periodiques. Poincaré a même indiqué brièvement à cet égard des voies qu'il importerait de poursuivre[2] et par lesquelles on pourra démontrer immédiatement l'existence de solutions périodiques toutes les fois que, par des conventions convenables, on pourra considérer les lignes cherchées comme tracées sur des variétés à connexion (linéaire) multiple, en particulier chaque fois que certains des entiers désignés plus haut (page 268) par $p$ (nombre total de circonferences dont a augmenté pendant un période un paramètre angulaire) seront différents de zéro.

La question est beaucoup plus difficile lorsqu'on ne peut introduire de connexion multiple, ainsi qu'il arrive pour les géodésiques des surfaces convexes, auxquelles est consacré le mémoire des *Transactions of the Amer. Math. Soc.* mentionné plus haut. La propriété de minimum habituellement employée pour caractériser les géodésiques suffit encore à établir l'existence de géodésiques fermées si la surface est très peu différente d'une sphère, — c'est-à-dire, une fois de plus, dans une hypothèse infiniment voisine d'un cas d'intégration classique. Mais c'est en posant le problème d'une manière toute nouvelle, en en faisant un problème d'extremum lié, que Poincaré arrive au même résultat sur une surface fermée convexe quelconque.

Dans le Mémoire dont nous venons de parler, il utilise le Calcul des Variations sans se préoccuper de le compléter. Au contraire, dans *les Méthodes nouvelles de la*

---

[1] Congrès Int$^{al}$ des Mathématiciens. Paris 1900, page 107.
[2] Voir *Analyse,* page 106.

*Mécanique Céleste*, il avait examiné la question de savoir si une courbe solution des équations différentielles fournit ou non un extremum de l'action.

On sait que la méthode obtenue par WEIERSTRASS pour décider de l'extremum entre deux extrémités données, comme plusieurs des découvertes dont nous avons eu l'occasion de parler précédemment, avait été une de celles que le géomètre allemand s'était contenté d'enseigner oralement (les premiers ouvrages portant trace de cet enseignement, la thèse de M. ZERMELO et, — pour les intégrales doubles, le Mémoire de M. KOBB, — paraissaient vers le même moment que l'ouvrage de POINCARÉ et l'exposé complet de M. KNESER, quelques années plus tard). Par contre, M. DARBOUX avait fait connaître, sur l'exemple particulier des lignes géodésiques, une autre méthode conduisant à la solution: M. KNESER devait (dans l'ouvrage auquel nous venons de faire allusion) l'étendre au cas général.

POINCARÉ a-t-il retrouvé, de son côté, les résultats de WEIERSTRASS? Dans la notice qu'il lui a consacrée, [1] le Calcul des Variations n'est pas mentionné. D'autre part, dans *les Méthodes nouvelles*, [2] la condition de WEIERSTRASS est énoncée, mais non sous sa forme connue, quoique celle-ci et celle de POINCARÉ soient équivalentes.

Quoi qu'il en soit à cet égard, le résultat que POINCARÉ a en vue, en l'espèce, est nouveau et lui appartient en propre: c'est l'obtention des conditions nécessaires et suffisantes pour l'extremum lorsque la ligne arbitraire est assujettie non plus, comme dans le problème classique qui est celui auquel s'était attaqué WEIERSTRASS, à joindre deux points donnés, mais à être fermée.

A cet effet, POINCARÉ emploie d'avance, mais sans en faire la théorie générale, quelques uns des moyens dont s'est servi M. KNESER pour généraliser la méthode de M. DARBOUX. En particulier, si la notion d'orthogonalité suffit à l'étude de l'action correspondant au mouvement absolu, POINCARÉ est amené à construire des »transversales», lorsqu'il passe au mouvement relatif. Le «champ» qu'il fait intervenir est d'ailleurs remarquable: il n'a pas, à notre connaissance, eu d'autres applications et n'a sans doute pas rendu tous les services qu'on est en droit d'en attendre: il et formé par une des familles de solutions asymptotiques à la courbe fermée envisagée.

Le problème d'extremum tel qu'il se pose sous la forme classique, c'est-à-dire entre deux points donnés, figure d'ailleurs également dans les recherches de POINCARÉ sur les solutions périodiques, et la manière dont la solution dépend

[1] Acta, tome 22.
[2] Tome III, p. 261.

de la nature des foyers (suivant que ceux-ci sont des points ordinaires ou des points de rebroussement de l'enveloppe de la famille d'extrémales correspondantes), y est indiquée. Poincaré applique surtout sa discussion au cas où les deux extrémités données coïncident en un même point $A$. Avec une autre remarque géométrique également importante, l'influence du sens de l'angle ainsi formé au point anguleux $A$, cette étude est, pour lui, le moyen d'arriver à une conception simple des solutions périodiques du deuxième genre et de période $k^{\text{uple}}$ qui naissent, comme nous l'avons dit, au voisinage de certaines solutions du premier genre convenablement choisies. Un exposant caractéristique étant, sur celles-ci, commensurable avec $\frac{2i\pi}{T}$ il en résulte que chaque point sera à lui-même son $2p^{\text{ième}}$ foyer, $p$ étant un entier convenable; tous ces foyers seront d'ailleurs points de rebroussement, et de même sorte (c'est-à-dire que le rebroussement y aura lieu dans le même sens).

Pour arriver à une solution périodique du deuxième genre, Poincaré fait varier d'une petite quantité, dans un sens convenable, le paramètre $\mu$ et constate que chaque point $M$ de la courbe fermée primitive $C$ peut être joint à lui-même par une ligne satisfaisant aux équations différentielles avec la nouvelle valeur du paramètre. Si enfin on choisit $M$ de manière que l'action le long de cette ligne soit le plus grande ou le plus petite possible, le point anguleux en $M$ disparaît, et on a une solution périodique du deuxième genre, coupant $C$ en $2p$ points.

C'est également, du moins pour une partie, à propos des trajectoires de la Dynamique, — en s'occupant de légitimer la méthode qui avait donné à Hill ses solutions périodique du problème des trois corps et, en même temps, celle que M. Appell avait appliquée à un nouveau développement des fonctions elliptiques — que Poincaré a été amené à doter l'Analyse d'un nouveau mode de passage à la limite, voisin de celui qu'elle allait devoir à M. Fredholm, les *déterminants infinis* et la résolution des équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Nous ne redirons pas après lui[1] les circonstances remarquables qu'il a rencontrées dans cette recherche. On sait que le nouvel algorithme ainsi fondé a dû d'importantes applications à M. Helge von Koch. Nous avons déjà rappelé que ce savant a pu ainsi calculer (sous leur forme convergente) les intégrales irrégulières des équations linéaires, question liée d'ailleurs directement à l'intégration des équations à coefficients périodiques.

[1] *Analyse*, page 92—94.

## III. Les équations aux dérivées partielles et les problèmes de la Physique mathématique.

Même après l'évolution qui a augmenté l'importance des équations différentielles ordinaires pour la Physique mathématique, celle-ci continue — et continuera — à s'appuyer sur les *équations aux dérivées partielles.*

Pour ces dernières également, et plus nettement même que pour les précédentes, la solution telle qu'on la concevait primitivement, — ce qu'on a appelé l'intégration *formelle* — est hors de cause. Non seulement l'*intégrale générale,* — par le moyen des symboles élémentaires connus, est le plus souvent introuvable; mais même une fois obtenue, elle ne rend pas les mêmes services que dans le cas des équations différentielles et ne dispense pas de recherches aussi difficiles ou plus difficiles que celles qui ont conduit à l'écrire, lorsqu'on veut l'appliquer aux véritables problèmes qui se posent le plus généralement.

Les difficultés que ceux ci présentent peuvent être, suivant les cas, de nature très différente.

Il peut arriver qu'elles ressemblent, avec des différences de degré, à ce qu'elles sont pour les équations différentielles, de sorte que la solution puisse être considérée, au point de vue théorique, comme fournie localement par les méthodes de Cauchy, quitte, dans une seconde partie du travail, à faire la synthèse des différents éléments de solution ainsi obtenus.

C'est ce qui se passe — l'équation étant supposée introduite par l'étude d'un phénomène physique — lorsque celui-ci se déroule librement dans l'espace illimité, et où, par conséquent, pour définir son évolution, il suffit de se donner les *conditions initiales,* c'est-à-dire son état à un instant déterminé.

Mais si le phénomène a pour théâtre une enceinte limitée par des parois, — de sorte que pour achever de le définir, il faut écrire un système de *conditions aux limites,* exprimant le rôle joué par les parois en question, — une difficulté d'un tout autre ordre apparaît.

Il est encore vrai que, au voisinage d'un point quelconque, la solution est le plus souvent représentable par des développements en séries du même type que dans les problèmes précédents. Mais, cette fois, aucun de ces *éléments* de solution, — non pas même le premier, [1] comme il arrivait pour les équations différentielles ordinaires — ne peut être déterminé isolément: la connaissance de chacun d'eux est inséparable de celle de *tous* les autres.

---

[1] Rien ne conduit d'ailleurs à établir entre les éléments en question un ordre déterminé: à considérer spécialement l'un d'entre eux plutôt qu'un autre comme le premier.

C'est le renversement du principe même qui, en toutes les autres circonstances, guide la marche du calcul intégral: la division de la difficulté en une difficulté locale et une difficulté de synthèse. Une telle division est ici radicalement impossible.

Aussi l'apparition de ces sortes de problèmes — et surtout du premier de tous, celui qui leur a servi de type, le problème de DIRICHLET — a-t-elle changé profondément toute l'allure de la mathématique moderne.

Cet exemple est précisément celui que POINCARÉ a choisi pour montrer comment la physique impose aux mathématiques des problèmes auxquels elle n'aurait pas songé à elle seule. On voit qu'il n'en pouvait exister de plus typique.

Un tel problème ne pouvait manquer d'attirer l'attention de POINCARÉ comme il avait attiré celle de plusieurs de ses prédécesseurs. La nouvelle solution qu'il y apporta, la méthode du *balayage*, s'inspire très directement de la nature même de la question, de cette interdépendance mutuelle de toutes les parties de la solution telle que nous venons de la signaler.

Mais, alors que la méthode du balayage elle-même se rattache aux autres travaux antérieurement consacrés à la théorie du problème de DIRICHLET,[1] cette théorie devait peu après entrer dans une phase toute nouvelle et subir une révolution profonde dont l'utilité ressort, elle aussi, des remarques précédentes.

Son principe consiste à remplacer l'équation *aux dérivées partielles*, ainsi que les autres conditions auxquelles doit satisfaire la fonction inconnue, par une équation *intégrale*. Au lieu de faire figurer l'inconnue sous des signes de dérivation, on la fait apparaître sous un signe d'intégration.

Les premiers sont évidemment une sorte de microscope par laquelle on représente des relations dans l'infiniment petit. Le second, au contraire, est essentiellement synthèse et non analyse. Point n'est besoin dès lors de longues explications pour comprendre comment son emploi est autrement bien adapté aux circonstances dont nous avons parlé que celui de la différentiation.

Ce changement complet d'orientation dans l'étude du problème de DIRICHLET et de tous les problèmes analogues de la physique mathématique évoque, tout d'abord, le nom de M. FREDHOLM.

On se tromperait cependant du tout au tout en n'y rattachant pas également, et d'une manière très étroite, celui de POINCARÉ. Ce serait méconnaître

[1] Elle se distingue des méthodes d'approximations successives proposées jusqu'à lui surtout en ce que celles ci, dans le choix des expressions destinées à servir de points de départ, se préoccupaient tout d'abord de satisfaire dès l'abord à l'équation aux dérivées partielles, les autres conditions du problème devant être vérifiées par le jeu des retouches successives. POINCARÉ, le premier, guidé par l'interprétation physique de ses calculs, songea à faire l'inverse.

cette vérité aujourd'hui banale que les manifestations les plus importantes, les plus inattendues de l'esprit humain sont le produit non seulement du cerveau de leur auteur, mais de toute l'époque qui les a vu naître.

Or notre époque, au point de vue mathématique, c'est avant tout, POINCARÉ.

Voyons comment son œuvre a été une condition indispensable, la naissance de la nouvelle méthode.

La première étape qui devait conduire à celle-ci peut être cherchée dans le célèbre travail de M. SCHWARZ inséré, à l'occasion du jubilé de WEIERSTRASS, dans les *Acta Societatis Fennicae* (1885).

Le point de départ de M. SCHWARZ est une question de pure analyse empruntée au Calcul des Variations. Mais le résultat obtenu admet une interprétation physique immédiate. L'équation aux dérivées partielles considérée par M. SCHWARZ est immédiatement liée à celle qui gouverne les vibrations d'une membrane tendue et ce qu'il obtient, c'est le *son fondamental* lequel se présente comme correspondant à la valeur qu'il faut donner à un certain paramètre $\lambda$ qui figure dans l'équation aux dérivées partielles.

Dans l'étude de tout phénomène vibratoire dans un milieu limité l'expérimentateur constate, on le sait, l'existence d'un tel son fondamental, ou, s'il s'agit d'autre chose que d'acoustique, d'une telle *fréquence fondamentale.* Mais, de plus, cette fréquence fondamentale n'est pas la seule *fréquence propre:* en acoustique, par exemple, le son fondamental s'accompagne d'une série indéfinie d'*harmoniques* dont les propriétés, sous les rapports les plus essentiels, sont analogues à celles du premier.

Expérimentalement, l'existence de toutes ces fréquences propres est manifeste. Mathématiquement, M. SCHWARZ était le premier à démontrer par sa savante méthode celle de la plus simple d'entre elles, la fréquence fondamentale. Il est clair qu'un tel résultat demandait à être complété par son extension aux sons harmoniques. Dix ans après, en effet, M. PICARD parvenait à établir l'existence du premier d'entre eux, c'est-à-dire du second son propre.

C'est à POINCARÉ qu'est due la solution générale, c'est-à-dire la démonstration de l'existence de tous les harmoniques successifs.

Par l'emploi de profonds lemmes géométriques, il démontre que, multipliant la solution par un polynôme en $\lambda$ à coefficients indéterminés, on peut toujours choisir ces coefficients de manière à ce que le développement du produit suivant les puissances de $\lambda$ converge dans un rayon plus grand qu'avant la multiplication, et même aussi grand qu'on le veut si le degré du polynôme a été pris suffisamment élevé. Ceci équivaut à dire que cette solution est une fonction méromorphe de $\lambda$. Son numérateur seul est fonction de la position d'un point dans le do-

maine que remplit le milieu considéré: son dénominateur et, par conséquent, ses pôles en sont indépendants.

Ce sont eux qui fournissent les fréquences propres cherchées. Les résidus correspondants ou *fonctions fondamentales* qui donnent la forme des vibrations propres, représentent une seconde partie importante de la découverte ainsi réalisée.

Ce résultat capital, véritable fondement de toute cette partie de la physique mathématique, ne suffisait cependant pas à préparer l'évolution dont nous avons parlé tout à l'heure. En particulier, il n'aurait pas à lui seul rendu possible l'application de la méthode des équations intégrales au problème de Dirichlet. Il a fallu d'abord que Poincaré reprît au même point de vue la plus connue et la plus importante des méthodes indiquées (indépendamment de celle du balayage) pour la résolution de ce problème, la méthode de Neumann.

Ce qui fait peut-être du mémoire sur la *Méthode de Neumann et le principe de Dirichlet* un des plus beaux triomphes du génie de Poincaré, c'est que rien ne faisait prévoir l'analogie qu'il allait établir entre ce problème et le précédent.

Nous avons rappelé que les constatations expérimentales indiquaient *a priori* l'existence, dans le problème considéré par Schwarz une série d'harmoniques, sinai que de fonctions fondamentales correspondantes.

Rien de pareil ne se présentait à propos de la méthode de Neumann; et même, rien ne conduisait à introduire dans cette nouvelle question le paramètre indéterminé $\lambda$ qui s'introduit de lui-même dans celle des harmoniques.

L'analogie analytique était à peine plus utilisable que l'analogie physique. Il est vrai que la solution fournie par Poincaré fait apparaître dans les deux cas les mêmes résultats essentiels, mais non pour les mêmes raisons.

En un mot, les fonctions fondamentales, au lieu d'être suggérées par une interprétation physique simple, devaient ici sortir tout armées du cerveau de l'analyste.

Poincaré montra cependant, ici encore, que la vraie signification de la méthode de Neumann n'était autre que le développement de la solution par rapports aux puissances d'un certain paramètre qu'il introduit dans les données du problème, et que toutes les autres circonstances principales rencontrées à propos de l'étude des sons harmoniques se retrouvent ici.

Ces résultats étaient d'ailleurs essentiels pour la méthode de Neumann elle-même: car ils permettaient d'en établir la légitimité sans les restrictions qu'avait apportées son auteur.

Avec eux, — et aussi, ajoutons-le, après la méthode de Robin, d'une part,

à côté de laquelle il faut citer, de l'autre, les travaux bien connus de M. VOLTERRA, — tout était prêt pour l'entrée en scène de la méthode de M. FREDHOLM.

Celle-ci, en effet, suit pas à pas la marche que nous venons de retracer. Elle repose essentiellement sur l'introduction du paramètre $\lambda$ de POINCARÉ et sur la manière dont il figure dans l'expression de l'inconnue. Seulement, grâce à sa belle méthode de résolution des équations intégrales, M. FREDHOLM peut écrire, sous forme de développements en séries immédiatement connus, le numérateur et le dénominateur que POINCARÉ n'obtenait que par de délicates approximations successives.

Ainsi les solutions de tous ces problèmes fondamentaux de la physique mathématique, — et en particulier, la détermination des sons propres, où la forme des domaines intervient d'une manière si mystérieuse — sont acquises dès POINCARÉ.

Seulement, pour reprendre la parole même que nous citions en commençant, ces mêmes problèmes sont «plus» résolus par la méthode de FREDHOLM.

Les recherches précédentes ne s'appliquent pas uniquement à la Physique mathématique; elles intéressent également la Mécanique céleste par le problème des marées. POINCARÉ montrait effectivement, dans deux Mémoires *Sur l'équilibre et le mouvement des mers,* comment l'emploi des fonctions fondamentales qu'il venait de découvrir permet, quoiqu'avec des difficultés nouvelles,[1] de tenir compte de l'élément le plus compliqué du problème, l'influence des continents. Nous nous avancerions encore ici sur un domaine qui n'est pas le nôtre en analysant les conséquences auxquelles il est ici parvenu; et nous ne saurions, pour la même raison, insister sur celles qu'il a obtenues lorsque, après l'apparation de la méthode de FREDHOLM, il est revenu sur ce sujet dans sa *théorie des Marées,* une des premières et des plus importantes applications qui (après celles en vue desquelles elle avait été imaginée) aient été données de la méthode en question.

* * *

Mais nous avons à rappeler, quoique sommairement et au strict point de vue des principes analytiques, les recherches qui ont eu pour objet la figure des corps célestes, c'est-à-dire la figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation. Ce problème occupe une place à part, la plus haute en un sens, dans la Philo-

[1] Voir *Analyse,* p. 119.

sophie naturelle. Si difficiles que soient les problèmes de Physique mathématique étudiés tout à l'heure, un caractère leur est commun, qui est une notable simplification: ils sont tous linéaires. Si l'on a obtenu la solution du problème de DIRICHLET, pour une surface donnée, avec les données à la frontière $V_1$ d'une part, et avec les données $V_2$ de l'autre, cette solution sera connue par cela même, si les données ont les valeurs $V_1 + V_2$. Il est aisé de se convaincre que toutes les théories imaginées pour la résolution de ce problème et de tous ceux qui s'y rattachent reposent essentiellement sur ce fait.

Le problème de l'équilibre d'une masse fluide en rotation est, parmi toutes les applications physiques ou mécaniques des équations aux derivées partielles, la seule pour lequel la simplification précédente ne se produise pas; et, par cela même, il se montre d'un ordre de difficulté supérieur à tous les autres. C'est aussi le seul[1] pour lequel, en même temps que la fonction qui doit vérifier une équation aux dérivées partielles, le domaine même dans lequel cette fonction est définie soit inconnu.

Aussi les théorèmes d'existence les plus simples manquaient-ils eux mêmes dans cette théorie.

Ces hautes difficultés ne pouvaient tarder à tenter POINCARÉ. Voyons par quelles méthodes, dès 1885, il travailla, ici même,[2] à les résoudre.

Nous avons dit que ces méthodes relèvent toutes du Calcul des Variations si l'on prend ce mot dans son acception la plus large. Les considérations qui font l'objet propre du Calcul des Variations classique, celles de maximum et de minimum, y interviennent également et, outre l'usage qui en est fait pour la démonstration des théorèmes d'existence, POINCARÉ a repris et complété les résultats de M. LIAPOUNOF sur la sphère considérée comme donnant le potentiel d'attraction maximum.

Mais l'essence de son analyse est dans l'extension aux problèmes à une infinité d'inconnues, des méthodes de discussion que fournissent, pour le cas d'une inconnue unique, le Calcul différentiel et la géométrie analytique.

Considérons une équation à une seule inconnue $x$, mais contenant un paramètre $\mu$, soit

$$f(x, \mu) = 0.$$

[1] Il faudrait toutefois, aux deux points de vue mentionnés dans le texte, faire exception pour le mouvement des liquides dans le cas le plus général, c'est-à-dire avec une surface libre notablement différente du plan horisontal.

[2] Acta, t. 7.

Si l'on tient compte des deux variables qui y entrent, on sera conduit à la représenter par une courbe plane où $\mu$ sera l'abscisse et $x$ l'ordonnée.

Si en un point $(x_0, \mu_0)$ de cette courbe, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'annule, on aura, en général, une tangente parallèle à l'axe des $x$ et, lorsque $\mu$ passera par la valeur $\mu_0$, l'équation précédente, considérée comme l'équation en $x$, perdra deux racines (celles-ci venant se confondre entre elles en $x_0$ pour devenir ensuite imaginaires) ou, au contraire, en acquerra de nouvelles: $\mu_0$ est ce que l'on peut appeler une valeur *limite* pour $\mu$. Mais si $\mu$ traverse la valeur $\mu_0$ sans que l'équation en $x$ cesse d'avoir, tant avant qu'après cette valeur, des racines voisines de $x_0$, le point $(x_0, \mu_0)$ est, en général, point multiple. Les discussions qui apprennent à décider s'il en est bien ainsi sont élémentaires, mais Poincaré leur emprunte un énoncé d'une forme nouvelle. Pour qu'il y ait *bifurcation*, autrement dit point multiple, il suffit (sur un arc de courbe réel où $\mu$ est supposé pouvoir prendre des valeurs tant immédiatement supérieures qu'immédiatement inférieures à $\mu_0$) que $\frac{\partial f}{\partial x}$, en s'annulant, change de signe.

Si maintenant on remplace l'équation unique qui précède par un système d'équations à un nombre égal d'inconnues, dépendant également du paramètre $\mu$, on sait que le rôle de la dérivée considérée tout à l'heure est rempli par un déterminant fonctionnel. Grâce au théorème de Kronecker, Poincaré étend à ces nouvelles conditions la conclusion précédente: en d'autres termes, si, au cours d'une variation continue dans laquelle $\mu$ est constamment croissant ou constamment décroissant, le déterminant fonctionnel en question change de signe, il y a bifurcation.

Ceci suffirait théoriquement, dans un grand nombre de cas, en ce qui concerne les équations ordinaires. Mais Poincaré se propose d'introduire ces notions dans un domaine nouveau. Un problème tel que celui de l'équilibre de la masse fluide en rotation peut être considéré comme conduisant à un système d'équations, mais en nombre infini et à une infinité d'inconnues.

Rien ne semblait alors devoir subsister de toute la discussion précédente, car la notion qui en formait le pivot, celle du jacobien, faisait défaut. Du moins il en était ainsi au moment ou Poincaré poursuivait les recherches dont nous parlons. La méthode de Fredholm seule devait, quelques années plus tard, fournir le moyen de combler directement cette lacune; et c'est d'elle en effet que s'est servi M. Liapounof lorsqu'il a continué les recherches de Poincaré et, là où celles-ci avaient simplement abouti à la démonstration de théorèmes d'existence, formé, pour représenter les solutions, des séries convergentes.

En 1889, Poincaré n'avait pas le déterminant de Fredholm à sa disposition. Mais il y a plus: les quantités qu'il va introduire pour parer à cet inconvénient seront, par le fait même de leur nombre, appelées à rendre des services qu'on ne pourrait obtenir de la considération du seul jacobien. C'est ce que nous a déjà montré l'exemple analogue des solutions périodiques où, cependant, la définition du jacobien ne souffrait aucune difficulté.

Les quantités en question ne sont autres, dans les questions d'équilibre ainsi abordées par Poincaré, que les *coefficients de stabilité* c'est-à-dire ceux par l'examen desquels on reconnait (conformément au théorème de Lagrange-Dirichlet[1]), le minimum du potentiel. Ce calcul consiste, comme on sait, dans la décomposition en carrés d'une certaine forme quadratique: les coefficients de stabilité seront les coefficients des carrés ainsi obtenus.

Pour un système dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres, ces coefficients de stabilité ont un produit précisément égal au jacobien: par conséquent, leur liaison avec les considérations qui précédent est évidente et entraîne les conséquences suivantes:

Une solution des équations d'équilibre étant supposée connue pour une certaine valeur $\mu_0$ de $\mu$, si tous les coefficients de stabilité correspondants sont différents de zéro, les équations admettront encore une solution pour $\mu$ voisin de $\mu_0$ (puisqu'alors le jacobien sera aussi différent de zéro). En second lieu, dans une série continue de figures d'équilibre telles que $\mu$ varie constamment dans le même sens, tout changement de signe de l'un des coefficients de stabilité correspond à une figure de bifurcation.

Toutefois, si l'on ne se servait que du jacobien, il faudrait, si plusieurs coefficients changent de signe à la fois, supposer que leur nombre total est impair. En réalité, cette restriction est inutile, et on voit déjà ici un cas où il y a avantage à employer les coefficients de stabilité.

Par leur moyen d'autre part, on va triompher de la difficulté capitale du problème. Une fois mis sous la forme précédente, les énoncés conserveront un sens, même pour un système dépendant d'une infinité de paramètres, dès que les coefficients de stabilité auront pu être définis. Moyennant une hypothèse toujours vérifiée dans les applications qui se sont présentées, Poincaré établit (par des considérations d'extremum) qu'ils restent exacts.

Ainsi les quantités qui, d'après leur définition, n'intéressaient que la stabilité de l'équilibre, se trouvent gouverner l'existence même de cet équilibre.

---

[1] Ce théorème, d'ailleurs, n'est plus seul en jeu dans la discussion proprement dite de la stabilité et, ici encore, Poincaré est conduit, avec Lord Kelvin et Tait à une nouvelle distinction entre plusieurs espèces de stabilité possibles.

En même temps, dans ces mêmes formes d'équilibre de bifurcation que Poincaré enseignait à reconnaître les coefficients dont nous venons de parler obéissent à une loi remarquable, non moins importante au point de vue de l'application concrète qu'au point de vue purement analytique, celle de *l'échange des stabilités*, d'après laquelle le nombre des coefficients positifs s'échange entre deux séries de formes d'équilibre qui se rencontrent suivant une forme de bifurcation. Si donc l'une des séries était stable jusque à la valeur $\mu_0$ du paramètre qui correspond à la bifurcation, c'est l'autre série qui possède cette propriété lorsque $\mu$ varie au delà de $\mu_0$.

A l'aide du premier des principes cités tout à l'heure, Poincaré démontre aisément l'existence des figures annulaires d'équilibre, simplement affirmée par Lord Kelvin et Tait dans leur traité de Philosophie naturelle. Il lui suffit, à cet effet, de partir d'un premier équilibre (obtenu, il est vrai, en assujettissant d'abord le système à une liaison supplémentaire) et de constater que, dans ce premier état, aucun coefficient de stabilité n'est nul.

C'est le second principe qui a permis la découverte des nouvelles figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes de Jacobi. Le lecteur verra dans *l'Analyse* de Poincaré,[1] comment, en effet, la série des ellipsoïdes de Jacobi (comme celle des ellipsoïdes de Maclaurin, du reste) comprend une infinité de formes de bifurcation, servant de point de départ aux nouvelles formes dont il s'agit.

On verra également, au même endroit, comment un théorème sur l'impossibilité d'un équilibre stable au delà d'une certaine valeur de la vitesse de rotation a fourni à Poincaré la réponse à la question que pose l'explication des anneaux de Saturne.

---

Nous arréterons ici cette revue déjà trop longue et cependant si incomplète.

Sans même parler des applications aux sciences de la Nature qui seront étudiées ici même, il resterait tout au moins à traiter le côté philosophique de l'œuvre de Poincaré, qui tient une si grande place dans sa pensée et dans toute la pensée contemporaine. Nous n'avons pas qualité pour le faire, et cependant, sur combien de points cette œuvre philosophique n'est elle pas indissolublement liée aux découvertes scientifiques elles-mêmes. Qu'il s'agisse de géométrie non euclidienne, de théorie des ensembles, de relativité, de calcul des probabilités surtout, — la seule science mathématique qui, des trois états d'Auguste Comte, n'ait pas entièrement dépassé le second — une même impulsion est commune deux domaines; et l'on s'explique déjà, dans une certaine mesure la puissante

[1] P. 113.

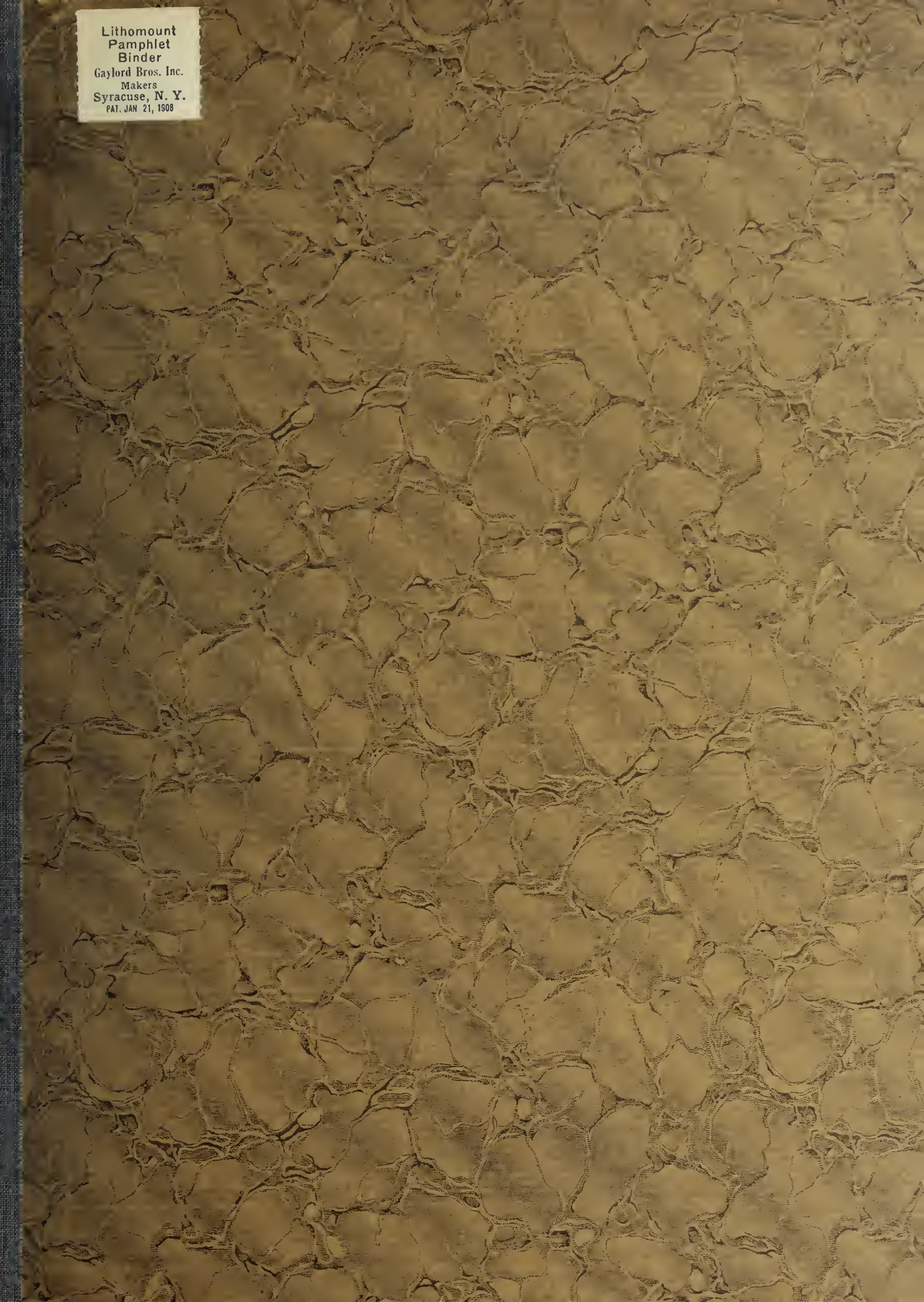
contribution apportée par Poincaré, à la mécanique statistique, lorsqu'on lit les réflexions sur le hasard qui figurent dans *la Science et l'Hypothèse*, ou dans *Science et Méthode*.

D'autre part, les œuvres aussi grandes et aussi géniales que celles de Poincaré, dont l'étendue se refuse à une analyse détaillée et ne peut être parcourue qu'à grands traits, sont cependant celles qu'on peut le moins abréger sans les trahir. Chez lui comme chez tous les créateurs vraiment grands, il serait essentiel, au contraire, de faire sentir, ainsi que nous l'avons tenté à une ou deux reprises, comment chaque détail est souvent fécond en conséquences, chaque ligne, en quelque sorte suggestive et grosse de travaux ultérieurs.

Ceux que l'inspiration Poincaréenne a déjà engendrés, et dont nous avons pu à peine signaler, chemin faisant, quelques-uns, remplissent, à eux seuls, plusieurs des Chapitres les plus importants des mathématiques contemporaines. Cependant, nul géomètre n'en doute, l'Analyse de Poincaré n'est pas près, tant s'en faut, d'avoir donné la mesure. Même, dans un grand nombre des voies qu'il a ouvertes, sa marche audacieuse nous a emportés sans que nous puissions encore songer à la poursuivre. Si grande qu'elle nous apparaisse, la pensée de Poincaré, comme celle d'un Gauss ou d'un Cauchy, ne laissera découvrir toute sa puissance qu'à nos successeurs, à la lumière des découvertes futures.



Uppsala 1921. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.


Lithomount
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros. Inc.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN 21, 1908

